Федеральное агентство по образованию
Российской Федерации

# Современные методы физико-математических наук

Труды международной
конференции
9 – 14 октября, Россия

Орел, 2006

## Том 2

- Математическое моделирование в гидродинамике и физике
- Физическая кинетика и механика дисперсных систем
- Математические методы в экономике

Орловский государственный университет

Федеральное Агентство по Образованию
Российской Федерации
Государственное Образовательное Учреждение
Высшего Профессионального Образования
«Орловский Государственный Университет»

# Современные методы физико-математических наук

Труды международной конференции
9 – 14 октября 2006 г., Орел

Том 2

Орел, 2006

УДК 519.6:532.5+531.3+531+330В631

Печатается по решению
редакционно-издательского совета
Орловского государственного университета
Протокол №8 от 05.07.06

**Современные методы физико-математических наук.** Труды международной конференции. 9 – 14 октября 2006 г., г. Орел. Т. 2. – Орел: Издательство ОГУ, Полиграфическая фирма «Картуш», 2006 г. – 230 с.

**ISBN 5-9708-0062-7 (978-5-9708-0062-1)**

В этом томе содержатся тексты докладов, прочитанных на юбилейной конференции физико-математического факультета Орловского госуниверситета, по следующим разделам: Математическое моделирование в гидродинамике и физике; Физическая кинетика и механика дисперсных систем; Математические методы в экономике.

Книга может быть полезна преподавателям, научным работникам, аспирантам и студентам старших курсов физико-математических факультетов университетов и педагогических институтов.

Редакционная коллегия сборника трудов: Д.П. Батуров, В.В. Ветров, В.П. Громов, С.Н. Дьяконов, А.Н. Зарубин, А.Г. Мешков, В.Ф. Пивень, Г.Н. Плотников, В.С. Румянцев, А.Б. Секерин, В.Д. Селютин, Т.Н. Сергиенко, Т.А. Симанева

Редактор тома: Ю.С. Федяев

УДК 519.6:532.5+531.3+531+330В631

***ISBN 5-9708-0062-7 (978-5-9708-0062-1)***

© ГОУ ВПО «Орловский государственный университет», 2006

***Посвящается 75-летию Орловского государственного университета и 75-летию физико-математического факультета***

# Предисловие

Проведение конференции приурочено к юбилею Орловского государственного педагогического института (ОГПИ), преобразованного в 1998 г. в классический университетет. В год основания ОГПИ были открыты несколько факультетов, одним из них был физико-математический факультет. На факультете работали замечательные педагоги — математики и физики: Б.И. Аргунов, П.С. Кудрявцев, С.М. Клименко, В.Л. Минковский, И.В. Парнасский, Н.М. Ростовцев и другие. Ныне преподавательский состав физико-математического факультета значительно вырос и пополнился. Многие преподаватели имеют высокий научный рейтинг как в России, так и за рубежом. Это ректор университетета д.п.н., профессор Ф.С. Авдеев; зав. лабораторией теории функций и функционального анализа д.ф.-м.н, профессор В.П. Громов; зав. кафедрой алгебры и математических методов в экономике д.ф.-м.н, профессор А.Б. Секерин; зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики профессор В.В. Ветров; зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений д.ф.-м.н, профессор А.Н. Зарубин; зав. кафедрой теоретической физики и математического моделирования д.ф.-м.н, профессор В.Ф. Пивень; зав. кафедрой информатики д.ф.-м.н, профессор А.Г. Мешков; д.п.н., профессор Т.К. Авдеева; д.ф.-м.н, профессор С.А. Савков и др. Большая часть из перечисленных ученых имеют свои научные школы и руководят научной работой аспирантов. В 2005 г. в ОГУ создан научно-исследовательский институт Естественных наук, в состав которого входит отдел Прикладной математики. Сотрудники этого отдела — преподаватели и аспиранты физико-математического факультета.

Тематика конференции определялась, в основном, исходя из научных интересов сотрудников ОГУ. Статьи, включенные в Труды конференции, были разбиты на три тома. Первый том посвящен «чистой» математике, т.е. дифференциальным уравнениям, математической физике, алгебре, топологии, геометрии, теории функций и функциональному анализу. Во второй том вошли статьи по наукам более близким к приложениям — это математические методы в экономике, математическое моделирование в гидродинамике и физике, физическая кинетика и механика дисперсных систем. Возможно, разделение статей на 1 и 2 тома было несколько условным, скорее оно диктовалось техническими причинами. Третий том содержит статьи по методике преподавания математики, физики и информатики. Мы надеемся, что статьи, включенные в Труды, вызовут интерес научной общественности. Мы также верим, что конференция Орловского государственного университета станет традиционной.

*Редколлегия сборника*

## Международная конференция

# Современные методы физико-математических наук

## 9 – 14 октября 2006, Орел, Россия

### Организатор – Орловский государственный университет

### Организационный комитет

**Мешков А.Г.**, председатель, зав. кафедрой информатики ОГУ
**Федяев Ю.С.**, ученый секретарь, доц. кафедры теоретической физики и математического моделирования ОГУ
**Ветров В.В.**, зав. кафедрой геометрии и методики преподавания математики ОГУ
**Громов В.П.**, зав. лабораторией теории функций и функционального анализа ОГУ
**Зарубин А.Н.**, зав. кафедрой математического анализа и дифференциальных уравнений ОГУ
**Ильина Н.А.**, проректор по учебной работе ОГУ
**Можарова Т.Н.**, декан физико-математического факультета, доц. кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений ОГУ
**Пивень В.Ф.**, зав. кафедрой теоретической физики и математического моделирования ОГУ
**Секерин А.Б.**, зав. кафедрой алгебры и математических методов в экономике ОГУ
**Селютин В.Д.**, проф. кафедры алгебры и математических методов в экономике ОГУ
**Сысоев И.В.**, зав. кафедрой общей физики ОГУ
**Дьяконов С.Н.**, ст. преп. кафедры общей физики ОГУ
**Чернобровкина И.И.**, доц. кафедры алгебры и математических методов в экономике ОГУ

## Тематика конференции

⋆ Краевые задачи для дифференциальных уравнений
⋆ Математическая физика
⋆ Симметрии и законы сохранения для дифференциальных уравнений, точная интегрируемость
⋆ Алгебра, топология, геометрия
⋆ Теория функций и функциональный анализ
⋆ Математические методы в экономике
⋆ Математическое моделирование в гидродинамике и физике
⋆ Физическая кинетика и механика дисперсных систем
⋆ Методика преподавания математики
⋆ Методика преподавания физики
⋆ Методика преподавания информатики

## *Список участников*

(секции 4–6)

### Секция 4. Математическое моделирование в гидродинамике и физике

1. ***Аксюхин Алексей Анатольевич***, Орловский государственный институт искусств и культуры, Орел, E-mail: aksjuhin@au.ru
2. ***Барг Михаил Аркадьевич***, Орловский государственный технический университет, Орел, E-mail: mvpi@hotbox.ru
3. ***Беляева Ирина Николаевна***, Белгородский государственный университет, Белгород, E-mail: ibelyaeva@bsu.edu.ru
4. ***Гандель Юрий Владимирович***, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина, Харьков, Украина, E-mail: gandel@ilt.kharkov.ua
5. ***Голубев Георгий Викторович***, Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева, Казань, E-mail: golubev@tm.kstu-kai.ru
6. ***Каменецкий Евгений Самойлович***, Институт прикладной математики и информатик РАН, Владикавказ, E-mail: esk@alanianet.ru
7. ***Клименко Ирина Анатольевна***, Белгородский государственный университет, Белгород, E-mail: IKlimenko@bsu.edu.ru
8. ***Лифанов Иван Кузьмич***, Военно-воздушная инженерная академия им. Н.Е. Жуковского, Москва, E-mail: lifanov_ik@mail.ru
9. ***Никольский Дмитрий Николаевич***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: NikolskyDN@mail.ru
10. ***Никольская Татьяна Александровна***, Орловский государственный технический университет, Орел
11. ***Макаренко Алла Николаевна***, Белгородский государственный университет, Белгород, E-mail: makarenkoa@bsu.edu.ru
12. ***Пивень Владимир Федотович***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: oryol@au.ru
13. ***Потапов Александр Алексеевич***, Институт радиотехники и электроники РАН, Москва, E-mail: fractal@mail.cplire.ru
14. ***Сербина Людмила Ивановна***, НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, Нальчик, E-mail: niipma@mail333.com
15. ***Ставцев Станислав Леонидович***, Институт вычислительной математики РАН, Москва, E-mail: stav@inm.ras.ru
16. ***Степович Михаил Адольфович***, Калужский государственный педагогический университет, Калуга, E-mail: m.stepovich@kspu.kaluga.ru
17. ***Федяев Юрий Сергеевич***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: Y.S.Fedyaev@univ-orel.ru

18. ***Флоринский Вячеслав Владимирович***, Белгородский государственный университет, Белгород

19. ***Чеканов Николай Александрович***, Белгородский государственный университет, Белгород, E-mail: Chekanov@bsu.edu.ru

20. ***Шестерин Дмитрий Евгеньевич***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: dshesterin@yandex.ru

21. ***Шпилевой Алексей Яковлевич***, Российский государственный университет им. И. Канта, Калининград, E-mail: sergev@nightmail.ru

### Секция 5. Физическая кинетика и механика дисперсных систем

22. ***Ахметов Альфир Тимирзянович***, Институт механики УНЦ РАН, Уфа, E-mail: alfir@anrb.ru

23. ***Дьяконов Сергей Николаевич***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: s.dyakonov@univ-orel.ru

24. ***Кобозев Михаил Анатольевич***, Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, E-mail: MikeyK@yandex.ru

25. ***Копылова Оксана Сергеевна***, Ставропольский государственный университет, Ставрополь, E-mail: zolterxp@list.ru

26. ***Кузьмин Михаил Кузьмич***, Московский государственный областной университет, Москва, E-mail: lesir179@infoline.su

27. ***Любимова Наталия Николаевна***, Московский государственный областной университета, Москва, E-mail: natlove@inbox.ru

28. ***Мавлетов Марат Венерович***, Башкирский государственный университет, Уфа, E-mail: codehope@yandex.ru

29. ***Малай Николай Владимирович***, Белгородский государственный университет, Белгород, E-mail: Malay@bsu.edu.ru

30. ***Марков Олег Иванович***, Орловский государственный университет, Орел

31. ***Нефедов Александр Геннадьевич***, Московский государственный областной университет, Москва, E-mail: itbrains@gmail.com

32. ***Плесканев Алексей Александрович***, Белгородский государственный университет, Белгород

33. ***Рюмшин Борис Валерьевич***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: rbv@phys-math.ru

34. ***Стукалов Александр Анатольевич***, Белгородский государственный университет, Белгород

35. ***Яламов Юрий Иванович***, Московский государственный областной университет, Москва

36. ***Ярцева Елена Павловна***, Ставропольский государственный аграрный университет, Ставрополь, E-mail: yartseva_elena@mail.ru

### Секция 6. Математические методы в экономике

37. ***Абрамова Галина Николаевна***, Орловская региональная академия государственной службы, Орел
38. ***Верижников Михаил Владимирович***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: ursus@orel.ru
39. ***Давнис Валерий Владимирович***, Воронежский государственный университет, Воронеж, E-mail: vdavnis@mail.ru
40. ***Дельгашева Анна Анатольевна***, Самарский государственный экономический университет, Самара, E-mail: annzap@yandex.ru
41. ***Зубкова Лариса Николаевна***, Орловский государственный университет, Орел
42. ***Качевский Дмитрий Николаевич***, Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, Чебоксары, E-mail: kachevskyvd@mail.ru
43. ***Королев Григорий Васильевич***, Орловский государственный технический университет, Орел
44. ***Краснов Александр Михайлович***, Государственная академия специалистов инвестиционной сферы, Москва, E-mail: amkrasnovforsend@yandex.ru
45. ***Малявина Анна Викторовна***, Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова, Москва
46. ***Милых Федор Георгиевич***, Орловский государственный технический университет, Орел
47. ***Морозова Анна Валентиновна***, Орловский государственный технический университет, Орел, E-mail: kulakov@ostu.ru
48. ***Никитина Татьяна Евгеньевна***, Орловская региональная академия государственной службы, Орел
49. ***Нуртазина Карлыгаш Бегахметовна***, Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, Казахстан, Астана, E-mail: karlnur@mail.ru
50. ***Перепелица Виталий Афанасьевич***, Ставропольский государственный университет, Ставрополь, E-mail: perepel2@yandex.ru
51. ***Плеханов Александр Федорович***, Орловское ОСБ 8595, Орел
52. ***Попова Елена Витальевна***, Кубанский государственный аграрный университет, Краснодар, E-mail: elena-popov@yandex.ru
53. ***Русских Татьяна Николаевна***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: trusskih@rambler.ru
54. ***Свалов Анатолий Анатольевич***, Орловский государственный технический университет, Орел

55. ***Секерин Алексей Борисович***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: sekerin@orel.ru

56. ***Строев Сергей Павлович***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: stroewsp@mail.ru

57. ***Тинякова Виктория Ивановна***, Воронежский государственный университет, Воронеж, E-mail: tviktoria@yandex.ru

58. ***Филонов Анатолий Григорьевич***, Орловская региональная академия государственной службы, Орел, E-mail: postmaf@yandex.ru

59. ***Хакимова Гульшат Акимовна***, Уфимский государственный авиационный технический университет, Уфа, E-mail: gulshathak@mail.ru

60. ***Чернобровкина Ирина Ивановна***, Орловский государственный университет, Орел, E-mail: tchernob@orel.ru

61. ***Шуметов Вадим Георгиевич***, Орловская региональная академия государственной службы, Орел, E-mail: al@rekom.ru

62. ***Янгишиева Альфира Менлигуловна***, Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия, Черкесск

# Математическое моделирование в гидродинамике и физике

## О НОВОМ ЧИСЛЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ЗАДАЧ О ДЕБИТЕ СКВАЖИНЫ*

**А.А. Аксюхин**

ФГОУ ВПО «Орловский государственный институт искусств и культуры»,
г. Орел, ул. Лескова, 15

Предлагается новый численный метод решения двумерных задач фильтрации жидкости в неоднородном слое с законом проводимости, моделируемым непрерывной функцией одной координаты. Задача о дебите скважины сводится к серии плоскопараллельных задач сопряжения и решается методом дискретных особенностей.

**1.** Постановка двумерных задач о работе скважины в неоднородном тонком слое проводимости $P(M) = K(M)H(M)$ (здесь $K(M)$ , $H(M)$ — проницаемость и толщина слоя, $M(x, y)$ — точка среды) с плоским основанием при напорной стационарной фильтрации к ней несжимаемой жидкости приводится в работах [1]- [2]. Но точное и численное решение таких задач возможно лишь для небольшого числа законов проводимости слоя $P(M)$ из-за отсутствия известных фундаментальных решений соответствующих уравнений. Расширим класс таких задач для законов проводимости, моделируемых непрерывной функцией одной координаты.

Пусть в основании плоскости слоя выбрана декартова система координат $xOy$ так, что проводимость слоя меняется только с одной из координат: $P(M) = P(y_M)$. Считая толщину слоя постоянной $H(M) \equiv 1$, будем моделировать проницаемость среды $K(y_M)$ параллельными полосами с постоянной проницаемостью $K(y_\nu) = \text{const}_\nu$, $\nu = 1, 2, ..., m+1$, где $m$ — число границ сопряжения между полосами. Причем, в каждой полосе значение проницаемости среды выбирается на средней линии этой полосы (см. рис. 1).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

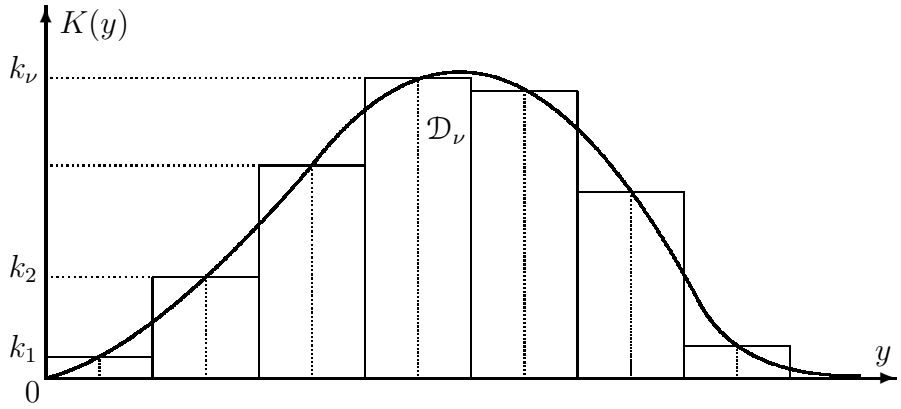


Рис. 1. Дискретный аналог непрерывной функции проницаемости.

В каждой из полученных полос течение будем описывать потенциалом скорости $\varphi_\nu(M)$, который удовлетворяет всюду в области течения $\mathcal{D}_\nu$ уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi_\nu(M) = 0\ , \quad M \in \mathcal{D}_\nu, \quad \nu = 1, 2, ..., m+1. \tag{1}$$

На каждой из границ сопряжения $L_\nu$, разделяющих две полосы с номерами $\nu$ и $\nu+1$, потенциалы $\varphi_\nu(M)$ удовлетворяют условиям сопряжения:

$$\varphi_\nu^-(M) = \varphi_{\nu+1}^+(M), \quad M \in L_\nu, \quad \nu = 1, 2, ..., m; \tag{2}$$

$$k_\nu \left(\frac{\partial\varphi_\nu(M)}{\partial n_M}\right)^- = k_{\nu+1}\left(\frac{\partial\varphi_{\nu+1}(M)}{\partial n_M}\right)^+, \quad M \in L_\nu, \tag{3}$$
$$\nu = 1, 2, ..., m.$$

Здесь и далее знаком "+" (или "–") обозначены предельные значения соответствующих величин, при подходе к границе $L_\nu$ со стороны (или с противоположной стороны) орта нормали $\vec{n}_M$ к границе в точке $M$ (орт $\vec{n}_M$ направлен в область $\mathcal{D}_{\nu+1}$).

На границе области питания скважины $L_\Pi$ для потенциалов $\varphi_\nu(M)$ выполняется условие

$$k_\nu\varphi_\nu(M) = 0, \quad M \in L_\Pi, \quad \nu = 1, 2, ..., m+1. \tag{4}$$

В дальнейшем будем считать контур питания гладкой (либо кусочно-гладкой) замкнутой кривой, ограничивающей всю область питания.

На контуре скважины $L_C$, который будем моделировать окружностью малого радиуса $R_C$, выполняется условие постоянства давления:

$$k_*\varphi_*(M_C) = C, \quad M_C \in L_C, \quad L_C \subset \mathcal{D}_*, \quad C = \text{const}, \tag{5}$$

где $\mathcal{D}_*$ — область той полосы проницаемостью $k_*$, в которой находится скважина.

Известно также, что в отсутствии границ $L_\nu$ в среде проницаемостью $k = 1$ течение к скважине описывает потенциал $\varphi_0(M)$, удовлетворяющий уравнению (1) и условию (5). Функция $\varphi_0(M)$ содержит в качестве множителя искомый дебит $q$.

**2.** Будем искать потенциалы течения $\varphi_\nu(M)$, $\nu = 1, 2, ..., m+1$ в виде:

$$\varphi_\nu(M) = \frac{\varphi_0(M) + \Phi(M)}{k_\nu}, \quad M \in \mathcal{D}_\nu, \tag{6}$$

где $\Phi(M)$ — потенциал возмущения, вызванный наличием границ $L_\nu$, $\nu = 1, 2, ..., m$. Этот потенциал будем моделировать в виде суперпозиции потенциалов двойного слоя, распределенных с плотностями $g_\nu(N)$ вдоль границ $L_\nu$, следующего вида:

$$\Phi(M) = \sum_{\nu=1}^{m} \int\limits_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} d\ell_N, \quad M \in \mathcal{D}_\mu, \tag{7}$$
$$\mu = 1, 2, ..., m+1.$$

Здесь $\vec{n}_N$ — вектор положительной нормали к границе $L_\nu$ в точке $N \in L_\nu$, $F(M,N)$ — фундаментальное решение уравнения (1), удовлетворяющее условию (5). Причем, согласно свойствам потенциалов двойного слоя [3], предельные значения функции (7) и ее нормальной производной на границе $L_\nu$ принимают вид:

$$\Big(\Phi(M)\Big)^{\pm} = \pm\frac{g_\mu(M)}{2} + \sum_{\nu=1}^{m} \int\limits_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} d\ell_N, \quad M \in L_\mu \tag{8}$$
$$\mu = 1, 2, ..., m.$$

$$\left(\frac{\partial \Phi(M)}{\partial n_M}\right)^{\pm} = \sum_{\nu=1}^{m} \int\limits_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial^2 F(M,N)}{\partial n_N \partial n_M} d\ell_N, \quad M \in L_\mu, \tag{9}$$
$$\mu = 1, 2, ..., m.$$

Благодаря свойствам (8) и (9) функции $\Phi(M)$, равенство (3) тождественно выполняется. Свойства функции $F(M,N)$ обращают в тождество условие (4). А выражение (2) приводит к интегральным уравнениям типа Фредгольма второго рода:

$$g_\mu(M) + 2\lambda_\mu \sum_{\nu=1}^{m} \int\limits_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} d\ell_N = -2\lambda_\mu \varphi_0(M), \quad M \in L_\mu, \tag{10}$$
$$\lambda_\mu = \frac{k_\mu - k_{\mu+1}}{k_\mu + k_{\mu+1}}, \quad \mu = 1, 2, ..., m.$$

Условие (5) принимает следующий вид:

$$\sum_{\nu=1}^{m} \int\limits_{L_\nu} g_\nu(N) \frac{\partial F(M_C,N)}{\partial n_N} d\ell_N = C - \varphi_0(M_C), \quad M_C \in L_C, \quad L_C \subset \mathcal{D}_*. \tag{11}$$

Совместное решение системы интегральных уравнений (10) и интегрального соотношения (11) позволяет отыскать плотности потенциалов возмущения $g_\mu(M)$, $\mu = 1, 2, ..., m$, искомые потенциалы $\varphi_\nu(M)$, $\nu = 1, 2, ..., m+1$ и дебит скважины $q$.

**3.** Систему (10)-(11) решим численно, используя метод дискретных особенностей [3]. Численное решение уравнений полученной системы заключается в замене непрерывных на границах $L_\nu$, $\nu = 1, 2, ..., m$ подинтегральных функций совокупностью их значений в дискретных точках этих кривых и переходу от интегральных выражений к системе алгебраических.

Зададим кривые $L_\nu$, $\nu = 1, 2, ..., m$ в параметрическом виде. Если $S_\nu$ — длина кривой $L_\nu$, а $s_\nu \in [0, S_\nu]$, — параметр длины дуги кривой, то $x_N = x(s_\nu)$, $y_N = y(s_\nu)$. Кривую $L_\nu$ разобьем равномерно по параметру $s_\nu$ с шагом $h_\nu$ на $n_\nu$ точек. Подинтегральные выражения в уравнениях (10) и (11) представим в параметрическом виде, а затем заменим интегралы по квадратурным формулам, выражая $d\ell_N$ через $h_\nu$. Получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} g_\mu(s_{\mu j}) + 2\lambda_\mu \sum\limits_{\nu=1}^{m} \sum\limits_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n_\nu} g_\nu(s_{\nu i}) \Omega(s_{\nu j}, s_{\nu i})\, h_\nu = -2\lambda_\mu \varphi_0(s_{\mu j}), \\ j = 1, 2, ..., n_\nu, \quad \mu = 1, 2, ..., m; \\ \sum\limits_{\nu=1}^{m} \sum\limits_{i=1}^{n_\nu} g_\nu(s_{\nu i}) \Omega(M_C, s_{\nu i})\, h_\nu = C - \varphi_0(M_C), \quad M_C \in L_C. \end{cases} \tag{12}$$

Решив систему (12), найдем дебит скважины $q$ и потенциал течения в точке $M(x_M, y_M) \in \mathcal{D}_\nu$ по формуле:

$$\varphi_\nu(M) = \frac{1}{k_\nu} \left( \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{i=1}^{n_\nu} g_\nu(s_{\nu i}) \Omega(x_M, y_M, s_{\nu i})\, h_\nu + \varphi_0(x_M, y_M) \right). \tag{13}$$

**4.** В качестве примера решения задачи описанным методом рассмотрим задачу о дебите центральной скважины с круговым контуром питания, работающей в слое с законом проводимости среды, моделируемом функцией $P(M) = y_M^2$. Аналитическое решение этой задачи получено автором для случая $a < y_0$ (здесь $a$ — радиус контура питания, $y_0$ — ордината центра скважины) в работе [2] и имеет вид:

$$Q = \frac{2\pi C}{\ln \frac{a}{R_C}}, \tag{14}$$

где $Q$ — приведенный дебит скважины, $C$ — константа из условия (5), $R_C$ — радиус скважины.

При численном решении задачи в уравнениях (10)-(11) выбирались следующие функции:

$$\varphi_0(M) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{a}{r_{MM_0}}, \quad F(M, N) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{a}{r_{MN}}, \quad N \in L_\nu, \tag{15}$$

где $M_0$ — центр скважины, $\nu = 1, 2, ..., 6$. Область фильтрации была разбита 6-ю границами на 7 полос равной ширины $2a/7$. Коэффициент проницаемости в каждой полосе считался постоянным и равным $y_\mu^2$, где $y_\mu$ — координата середины $\mu$-той полосы, $\mu = 1, 2, ..., 7$. В качестве параметра $s_\nu$ разбиения границ $L_\nu$, $\nu = 1, 2, ..., 6$ выбиралась координата $x$. При этом считалось: $\frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} = \frac{\partial F(M,N)}{\partial y_N}$. Система алгебраических уравнений (12) решалась методом Гаусса. Полученное при этом значение дебита скважины лишь на 0,4% отличалось от вычисленного по формуле (14).

Таким образом, предложенный новый метод численного решения двумерных фильтрационных задач о дебите скважины может быть применим к задачам фильтрации жидкости в неоднородных слоях с широким многообразием законов проводимости, моделируемых непрерывной функцией одной координаты.

# Список литературы


[1] *А.А. Аксюхин.* Математическое моделирование двумерных задач о дебите системы скважин в неоднородных слоях // Вестник науки. Сборник научных работ преподавателей и аспирантов физико-математического факультета ОГУ. Выпуск 2. Орел. 2002. С. 4–12.

[2] *А.А. Аксюхин.* Математическое моделирование граничных задач фильтрации к скважине в неоднородных слоях грунта. Кандидатская диссертация. Орел. Орловский госуниверситет. 2000. 153 с.

[3] *И.К. Лифанов.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: ТОО "Янус", 1995. 520 с.


## СПЕКТР И СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНИАНА АСИММЕТРИЧНОГО ВОЛЧКА


**М.А. Аматов, И.А. Клименко, Н.А. Чеканов**

Белгородский государственный университет,

308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14


Задача вычисления собственных значений и функций для дифференциальных операторов является актуальной проблемой, так как для многих систем, в том числе прикладных, возникает необходимость определения спектра их собственных частот.

В настоящей работе решена задача на собственные значения

$$\hat{H}\psi = E\psi \tag{1}$$

для следующего эрмитового оператора Шредингера

$$\hat{H} = \hat{M}^2 + \eta(\hat{M}_1^2 + \chi\hat{M}_2^2 - \hat{M}_3^2), \tag{2}$$

который описывает вращающееся твердое тело с разными, в общем, моментами инерции $I_1$, $I_2$, $I_3$ – асимметричный волчок. Здесь $\hat{M}$ – оператор полного момента импульса, $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$, $\hat{M}_3$ – операторы его компонент, параметр $\chi = (2B - A - C)/(A - C)$ определяет степень асимметрии, параметр $\eta = (A - C)/(A + C)$ характеризует относительную разность между наибольшим и наименьшим моментами инерции, а величины $A$, $B$, $C$ – обратны моментам инерции $A = \hbar^2/2I_1, B = \hbar^2/2I_2, C = \hbar^2/2I_3$, $\hbar$ – постоянная Планка, причем без потери общности положим $(A \geqslant B \geqslant C)$.

Меняя величину $B$ можно получить всевозможные формы твердого эллипсоида: от вытянутой при $\chi = -1$ до сплюснутой при $\chi = 1$, а параметр $\eta$ меняется в пределах от 0 до 1.

Решение уравнения (1) ищется в виде разложения

$$\psi_J = \sum_j \sum_K C_K^{(j)} \cdot \varphi_{JK}^{(j)} \tag{3}$$

по базисным ортонормированным функциям

$$\varphi_{JK}^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{J,K} + j\varphi_{J,-K}),\ j = \pm 1,\ K \geqslant 0,$$

$$\varphi_{JK}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)=\sqrt{\frac{2J+1}{8\pi^2}}D^J_{MK}(\theta_1,\theta_2,\theta_3), \tag{4}$$

где $\varphi^{(j)}_{JK}$ – собственные функции симметричного волчка, $J$ – значение полного момента ($J=0,1,2,3,...$), $K$ – квантовое число ($K=0,1,2,...J-1,J$), $j$ – дополнительное квантовое число, определяющее четность собственной функции, $D^J_{MK}(\theta_1,\theta_2,\theta_3)$ – функции Вигнера, для которых имеют место соотношения

$$\hat{M}^2\varphi^{(j)}_{JK}=J(J+1)\varphi^{(j)}_{JK},$$

$$\hat{M}_3\varphi^{(j)}_{JK}=K\varphi^{(j)}_{JK}. \tag{5}$$

Так как гамильтониан (2) обладает симметрией $D_2$ точечной группы, то собственные значения и соответстующие состояния будем классифицировать по четырем неприводимым представлениям этой группы: $A, B_1, B_2, B_3$.

В результате гамильтонова матрица представляется в виде четырех блочных матриц. Для четных значений полного момента $J$ ниже приведем их явный вид:

$$A=\begin{Vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 2b_0 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2 & a_4 & b_4 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & a_J \end{Vmatrix} \tag{6}$$

с размерностью $(J/2+1)\times(J/2+1)$,

$$B_1=\begin{Vmatrix} a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & a_4 & b_4 & \cdots & 0 \\ 0 & b_4 & a_6 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_6 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_J \end{Vmatrix}, \tag{7}$$

$$B_2=\begin{Vmatrix} a_1-\tilde{b}_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{J-1} \end{Vmatrix}, \tag{8}$$

$$B_3=\begin{Vmatrix} a_1+\tilde{b}_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_3 & b_3 & \cdots & 0 \\ 0 & b_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_5 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{J-1} \end{Vmatrix}, \tag{9}$$

где

$$a_K = J(J+1)\Big[1 + \frac{\eta(1+\chi)}{2}\Big] - \frac{\eta^2}{2}(3+\chi),$$

$$b_K = \frac{1}{4}\eta(1-\chi)\sqrt{(J+K+1)(J+K+2)(J-K)(J-K-1)} = \tilde{b}_{K+2}. \qquad (10)$$

Матрицы $B_1$, $B_2$, $B_3$ имеют размерность $(J/2) \times (J/2)$.

Для малых значений полного момента $J = 1, 2, 3, 4$ получены уравнения для спектра в явном виде. Например, для $J = 3$ и уровней энергии $A$-типа формула для спектра имеет вид $\varepsilon = 12 + 4\eta\chi$. Однако уже для $J = 4$ и уровней энергии $A$-типа формула для спектра имеет вид кубического уравнения, поэтому для больших значений $J$ приходится прибегать к численным расчетам.

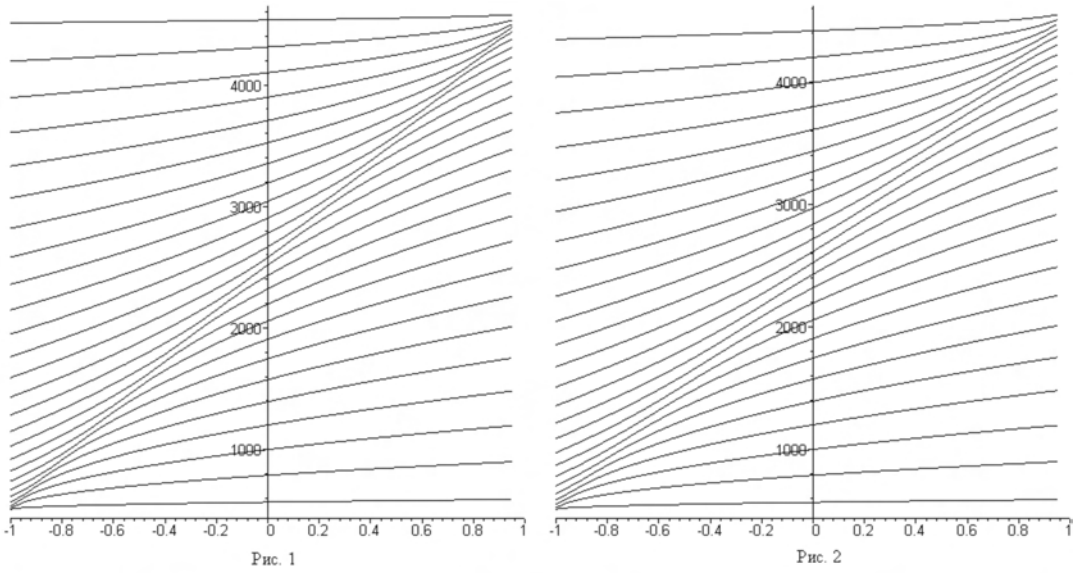


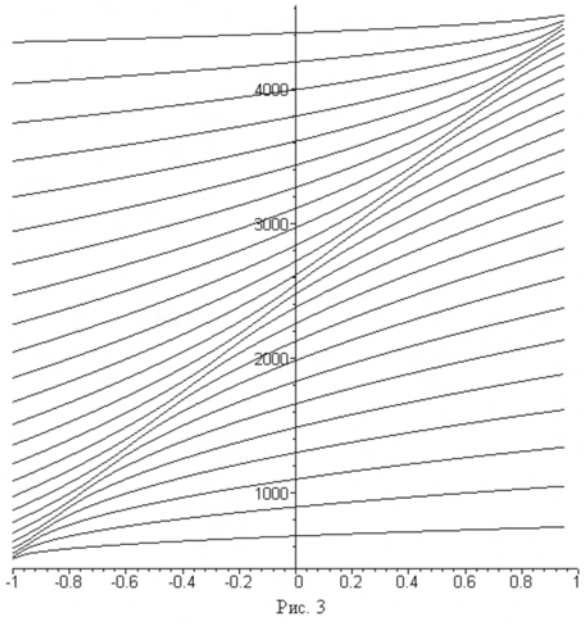

Рис. 1. Зависимость энергетических уровней $A$-типа от величины параметра асимметрии $\chi$ при полном угловом моменте $J = 50$.

Рис. 2. Зависимость энергетических уровней $B_1$-типа от величины параметра асимметрии $\chi$ при полном угловом моменте $J = 50$.

В настоящей работе была составлена программа ASYMMA в среде MAPLE, с помощью которой можно вычислить собственные значения (энергетический спектр) и собственные функции для произвольной величины $J$.

Ниже представлены результаты численных расчетов энергетических уровней всех четырех типов для $J = 50$.

Полученные решения могут быть применены для описания вращательных спектров молекул [1], а также несферических ядер [2]. Например, молекула озона при идентификации вращательных спектров моделируется асимметричным волчком [3], поскольку три главные момента инерции отличаются друг от друга: $I_1 = 7,87 \cdot 10^{-47}$ кг·м$^2$, $I_2 = 6,284 \cdot 10^{-46}$ кг·м$^2$, $I_3 = 7,089 \cdot 10^{-46}$ кг·м$^2$.



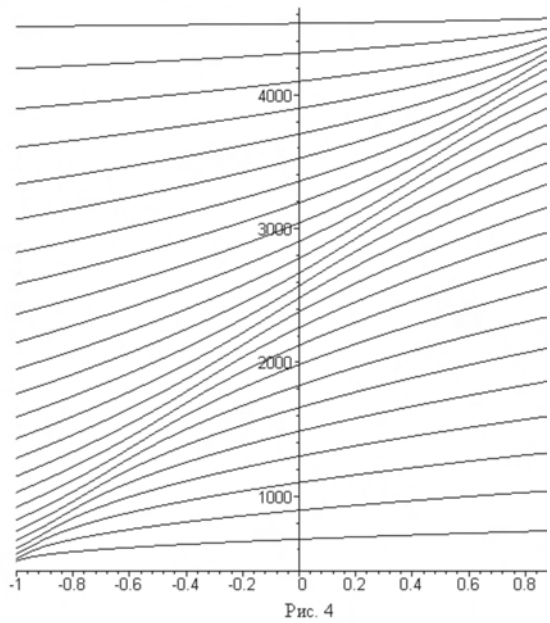




Рис. 3. Зависимость энергетических уровней $B_2$-типа от величины параметра асимметрии $\chi$ при полном угловом моменте $J = 50$.

Рис. 4. Зависимость энергетических уровней $B_3$-типа от величины параметра асимметрии $\chi$ при полном угловом моменте $J = 50$.

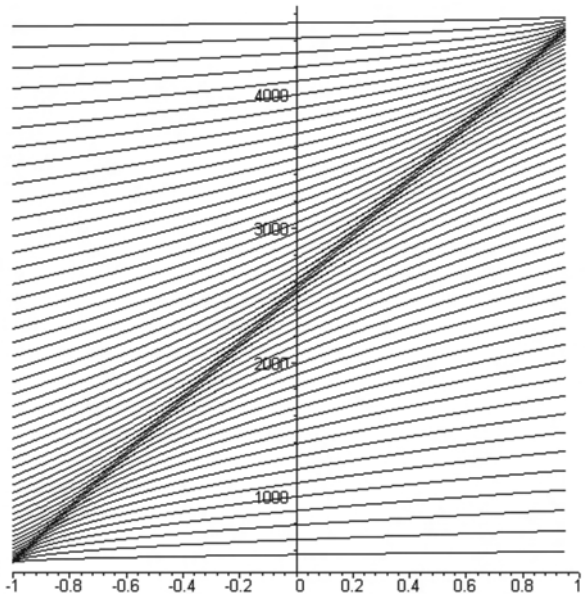



Рис. 5. Зависимость энергетических уровней $A-, B_1-, B_2-, B_3-$ типа от величины параметра асимметрии $\chi$ при полном угловом моменте $J = 50$.

# Список литературы

[1] *Г. Герцберг.* Колебательные и вращательные спектры многоатомных молекул. М.: ИЛ. 1949.

[2] *А.С. Давыдов.* Возбужденные состояния атомных ядер. М.: Атомиздат. 1967.

[3] *В.В. Лунин, М.П. Попович, С.Н. Ткаченко.* Физическая химия озона. М.: Изд-во МГУ. 1998.

## ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ГОРЕНИЯ МЕТОДОМ КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

**М.А. Барг, Ю.Х. Поландов**

Орловский государственный технический университет, г. Орел

В статье рассматривается модификация метода крупных частиц для моделирования процессов горения и взрыва газовоздушных смесей.

Для моделирования процесса горения газа, авторами работы предлагается следующая модификация метода крупных частиц. Вводится дополнительный параметр состояния - массовая доля продуктов сгорания $f$. В соответствие с методом крупных частиц моделируемое пространство разбивается на совокупность ячеек [1], [2]. Долю продуктов сгорания $f$ для каждой ячейки можно определить из выражения (1):

$$f = \frac{m_B}{m}, \tag{1}$$

где $m$ – общая масса смеси в ячейке, кг;

$m_B$ – масса продуктов сгорания в ячейке, кг.

При этом расчетные ячейки можно разделить на три группы:

- ячейки с исходной смесью, для которых выполняется условие $f < \epsilon$, где $\epsilon$ – параметр точности расчетов;
- «сгоревшие» ячейки - $f > 1 - \epsilon$;
- «горящие» ячейки.

Моделирование горения производится в три этапа.

На первом этапе рассматривается горение газа в ячейках. Для всех «горящих» ячеек определяется доля газа $\Delta f$, сгоревшего за время $\Delta t$, и рассчитывается выделение энергии $\Delta E$:

$$\Delta m_B = m * k_B; \tag{2}$$

$$\Delta f = \frac{\Delta m_B}{m} = k_B; \tag{3}$$

$$f' = f + \Delta f; \tag{4}$$

$$\Delta E = \Delta m_B H; \tag{5}$$

$$E' = E + \frac{\Delta E}{m} = E + k_B H; \tag{6}$$

где $k_B$ — коэффициент скорости горения газа,

$E$ — удельная полная энергия газа в ячейке, Дж/кг,

$\Delta E$ — абсолютное выделение энергии, Дж,

$H$ — теплотворная способность газа, Дж/кг,

$f'$ и $E'$ — соответственно доля продуктов сгорания и полная удельная энергия после этапа «горения».

Второй этап предполагает исследование распространения горения на соседние ячейки. В прямоугольной трехмерной сетке каждая ячейка имеет двадцать шесть соседних ячеек. С шестью из них она имеет общую грань, с двенадцатью – общее ребро, и с восемью ячейками – общую вершину. Соседняя ячейка воспламеняется в момент, когда фронт горения достигает границы между ячейками (соответственно грани, ребра или вершины). Рассмотрим распространение фронта горения внутри ячейки.

На данном этапе будем рассматривать распространение горения в «стоячем» газе, т.е. состояние газа не влияет на движение фронта горения. Пусть источник воспламенения находится в центре ячейки (точка $O$, рис. 1), тогда фронту потребуется различное время для достижения точек $A$, $B$ и $C$ (соответственно центр грани, центр ребра, вершина).

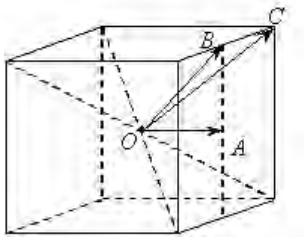



Рис. 1. Схема ячейки в модели распространения фронта пламени.

Если представить ячейку в форме куба, то при условии равенства его сторон: $\Delta X = \Delta Y = \Delta Z$, справедливы следующие соотношения длин отрезков:

$$OB = OC\sqrt{2/3},\ OA = OC/\sqrt{3}. \tag{7}$$

В момент времени, когда радиус фронта горения превышает $OA$ ($OB$, $OC$), происходит воспламенение ячеек, имеющих с текущей общую грань (ребро, вершину).

Рассматриваемая модель не позволяет определить непосредственное положение фронта внутри ячейки, однако для моделирования распространения горения достаточно знать лишь степень сгорания ячейки $f$. Так как ячейки, граничащие по вершинам, воспламеняются фактически в момент полного сгорания ячейки, то степень сгорания $f_4$ ячейки, при которой происходит их воспламенение, можно определить как:

$$f_4 = 1 - \epsilon. \tag{8}$$

Степень сгорания ячейки, при которой воспламеняются ячейки, имеющие с текущей ребро ($f_2$) или грань ($f_1$), можно определить по аналогии с выражениями (7):

$$f_2 = f_4\sqrt{2/3},\ f_1 = f_4/\sqrt{3}. \tag{9}$$

Таким образом, для выполнения второго этапа будем пользоваться следующей схемой:

- Если выполняется условие $f > f_1$, «воспламеним» все «негоревшие» ячейки, имеющие с текущей общую грань.
- Если выполняется условие $f > f_2$, «воспламеним» все «негоревшие» ячейки, имеющие с текущей общее ребро.
- Если выполняется условие $f > f_4$, «воспламеним» все «негоревшие» ячейки, имеющие с текущей общую вершину.

Под «воспламенением» здесь понимается установка плотности продуктов сгорания для ячейки в некоторое начальное значение ($f \leftarrow \epsilon$).

Далее определим значение коэффициента скорости горения $k_B$, используемого на первом этапе в выражении (2). Этот коэффициент показывает, какая доля газа в ячейке сгорает за время $\Delta t$:

$$k_b = \frac{\Delta t}{\sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2}} U_B f_4, \tag{10}$$

где $U_B$ — скорость распространения фронта в «стоячем» газе, м/с.

Скорость нормального горения сильно зависит от температуры газа:

$$U_B = U_{B0} \left(T/T_0\right)^2, \tag{11}$$

где $T_0$ — температура горения газа при начальных условиях, K;

$T$ — текущая температура газа в ячейке, K;

$U_{B0}$ — скорость нормального горения газа при начальных условиях, м/с.

Третий этап моделирования процесса горения заключается в моделировании переноса массы сгоревшего газа через границы ячеек. Перенос производится на основе схемы, применяемой для переноса остальных параметров. Однако здесь следует учитывать, что перенос осуществляется только из полностью сгоревших ячеек в уже горящие ячейки. Так, например, формулы первого порядка точности принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{i,j,k}^{n+1} = \frac{f_{i,j,k}^n \rho_{i,j,k}^n}{\rho_{i,j,k}^{n+1}} + \Big( & \Delta M_{i-1/2,j,k} f_{i-1/2,j,k} - \Delta M_{i+1/2,j,k} f_{i+1/2,j,k} + \\ & + \Delta M_{i,j-1/2,k} f_{i,j-1/2,k} - \Delta M_{i,j+1/2,k} f_{i,j+1/2,k} + \\ & + \Delta M_{i,j,k-1/2} f_{i,j,k-1/2} - \Delta M_{i,j,k+1/2} f_{i,j,k+1/2} \Big) \frac{1}{\Delta X \Delta Y \Delta Z \rho_{i,j,k}^{n+1}}, \end{aligned} \tag{12}$$

$$f_{i+1/2,j,k} = \begin{cases} f_{i,j,k}, & \tilde{U}_{i+1/2,j,k} > 0,\ f_{i+1,j,k} > \epsilon,\ f_{i,j,k} > 1 - \epsilon; \\ f_{i+1,j,k}, & \tilde{U}_{i+1/2,j,k} < 0,\ f_{i,j,k} > \epsilon,\ f_{i+1,j,k} > 1 - \epsilon; \\ 0; \end{cases} \tag{13}$$

$$f_{i-1/2,j,k} = \begin{cases} f_{i-1,j,k}, & \tilde{U}_{i-1/2,j,k} > 0,\ f_{i,j,k} > \epsilon,\ f_{i-1,j,k} > 1 - \epsilon; \\ f_{i,j,k}, & \tilde{U}_{i-1/2,j,k} < 0,\ f_{i-1,j,k} > \epsilon,\ f_{i,j,k} > 1 - \epsilon; \\ 0; \end{cases} \tag{14}$$

Предложенная модификация метода крупных частиц позволяет с определенной степенью точности моделировать процессы горения и взрыва газа.

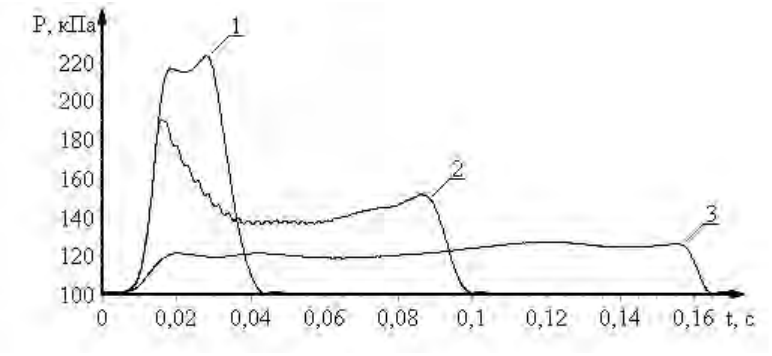



Рис. 2. Динамика изменения давления (абсолютного) при взрыве при $s/S = 1/4$ (1 – клапан в противоположной от горелки части; 2 – клапан в средней части топки; 3 – клапан рядом с горелкой).

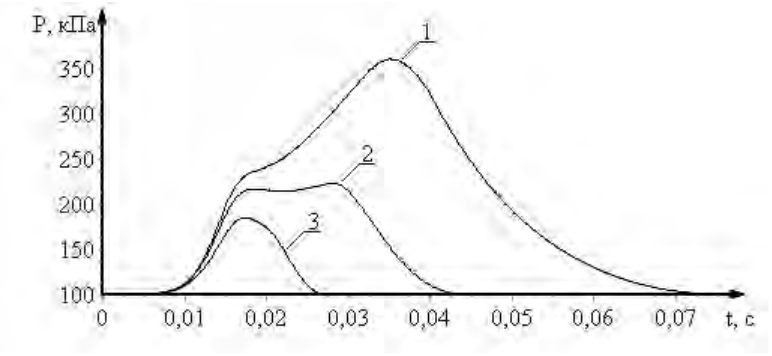



Рис. 3. Динамика изменения давления (абсолютного) при взрыве при положении клапана в противоположной от горелки части топки (1 – $s/s = 1/8$; 2 – $s/S = 1/4$; 3 – $s/S = 1/2$).

Данная методика была применена авторами для оценки влияния места расположения и размеров взрывного клапана на давление взрыва в топке парового котла. Так на рис. 2, 3 представлены графики изменения давления взрыва при различных положениях взрывного клапана относительно источника воспламенения и при различных соотношениях площадей сечения отверстия клапана ($s$) и топки ($S$) с учетом того, что клапан располагался в противоположной от горелки части топки котла. Видно, что давление взрыва топливно-воздушной смеси в топке уменьшается с приближением места положения взрывного клапана к горелке, что может служить рекомендацией при проектировании средств защиты теплотехнического оборудования.

Таким образом, предложенный способ моделирования может быть применен для прогноза развития реального процесса.

# Список литературы

[1] *О.М. Белоцерковский, Ю.М. Давыдов.* Метод крупных частиц в газовой динамике. Вычислительный эксперимент. М.: Наука, Физматгиз, 1982.

[2] *Ю.М. Давыдов.* Численное исследование актуальных проблем машиностроения и механики сплошных и сыпучих сред методом крупных частиц: в 5 т. Т. 4 Ракетные двигатели.

Алгоритмы. - Национальная Акад. прикладных наук. Междунар. ассоциация разработчиков и пользователей метода крупных частиц. М., 1998.

# КЛАССИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА И КВАНТОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДВУМЕРНОЙ $C_{2v}$ ИНВАРИАНТНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ

**И.Н. Беляева, А.Н. Макаренко, Н.А. Чеканов**
Белгородский государственный университет,
308007, г. Белгород, ул. Студенческая, 14

**Введение.** Для решения задач на собственные значения, в частности, стационарного уравнения Шредингера, разработаны и применяются различные методы, основным из которых является метод диагонализации. Однако вычислительные трудности сильно возрастают при увеличении размерности рассматриваемой системы и усложнении вида дифференциального оператора Шредингера, для которого решается задача на собственные значения. Кроме того, точность вычислений спектра и волновых функций ухудшается, если квантовая система допускает существование динамического хаоса в классическом пределе.

В работе [1] методом самосогласованного базиса было решено двумерное уравнение Шредингера для полиномиального гамильтониана инвариантного относительно группы $C_{3v}$ . Параметры этого гамильтониана выбраны были так, что поверхность потенциальной энергии (ППЭ) имела единственный минимум, хотя при другом выборе параметров ее геометрия достаточно сложная, например, имеет четыре локальных минимума и три седловых точки.

В настоящей работе рассматривается четырехпараметрический $C_{2v}$ симметричный гамильтониан, причем его параметры таковы, что ППЭ имеет только два локальных минимума и единственную седловую точку (см. рис. 1). С одной стороны, такой выбор ППЭ упрощает решение стационарного уравнения Шредингера по сравнению с ППЭ с более чем двумя локальными минимумами. А с другой стороны, позволяет исследовать влияние эффектов туннелирования и наличия классического хаоса (см. рис. 2) на свойства энергетического спектра и волновых функций, и также определить эффективность применения метода самосогласованного базиса.

В работе для полиномиального $C_{2v}$ симметричного гамильтониана методом самосогласованного базиса получены четыре системы дифференциальных уравнений в соответствии с наличием четырех неприводимых представлений группы $C_{2v}$. С помощью разработанной аналитически-численной программы $SELFA - C2V$ в среде MAPLE найдены численные решения этих систем уравнений: спектры и волновые функции всех четырех типов этой группы: $A_1$, $B_1$, $A_2$, $B_2$.

**Классический предел.** Исследуемому квантовому уравнению Шредингера соответствует классическая система, динамика которой описывается следующей функцией Гамильтона

$$H(x, y, p_x, p_y) = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + V(x, y), \tag{1}$$

$$V(x,y) = \frac{a}{2}(x^2+y^2) - \frac{a^{'}}{2}x^2 + bx^2y^2 + c(x^2+y^2)^2, \qquad (2)$$

где $x, y, p_x, p_y$ - канонически сопряженные координаты и импульсы, $V(x,y)$ - поверхность потенциальной энергии (ППЭ), $a, a^{'}, b, c$ - параметры, причем в нашей задаче $a, a^{'}, c$ – положительные, а $b$ – отрицателеный.

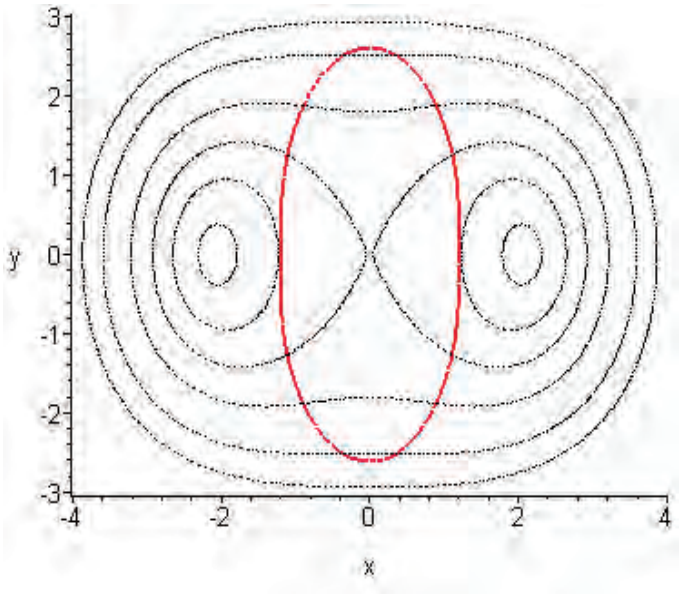



Рис. 1. Изолинии ППЭ (пунктирные) и линия (сплошная) нулевой гауссовой кривизны для симметричного гамильтониана (1), (2) с параметрами $a = 1.8490$, $a^{'} = 8.257825$, $b = -0.287070$, $c = 0.375509$.

Функция $V(x,y)$ имеет два минимума в точках $(\pm\sqrt{(a^{'}-a)/4c}; 0)$ с минимальной энергией $V_{min} = -(a^{'}-a)^2/16c$ и седловую точку в начале координат, в которой $V_s = 0$ (изолинии этой функции изображены на рис. 1. Наличие седловой точки может указывать на возможность существования в системе хаотических режимов движения. Согласно критерию по отрицательной гауссовой кривизне критическая энергия $E_{cr1}$ перехода от регулярного движения к хаотическому определяется минимальным значением потенциальной энергии $V(x,y)$ на линии нулевой гауссовой кривизны $K(x,y) = 0$ (см. рис. 1), уравнение которой следующее: $V''_{xx}V''_{yy} - (V''_{xy})^2 = 0$. В нашем случае это минимальное значение функция $V(x,y)$ принимает в точках $(\pm\sqrt{(a^{'}-a)/12c}; 0)$, и оно равно $E_{cr1} = minV_{K=0} = -\left(5(a^{'}-a)^2/144c\right)$. Как видно из рис. 1, область поверхности с отрицательной гауссовой кривизной является ограниченной. Максимальное значение $V(x,y)$ функции вдоль линии $K(x,y) = 0$, которое достигается в точках $\left(0; \pm\sqrt{(a^{'}-a)/2(b+2c)}\right)$, определяется по формуле $E_{cr2} = maxV_{K=0} = (a^{'}-a)(ab + ac + a^{'}c)/4(b+2c)^2$.

На рис. 2 приведены сечения Пуанкаре при двух значениях полной энергии $E = \mp 1$, первое из которых ниже, а второе выше значения $V_s = 0$ функции $V(x,y)$ в седловой точке. Сечения Пуанкаре (рис. 2b) указывают на существование динамического хаоса в гамильтоновой системе (1), (2). Как видно на рис. 2, хаотический режим движения возникает при энергиях $E > V_s$, что характерно для классических систем, ППЭ которых имеет единственную седловую точку.

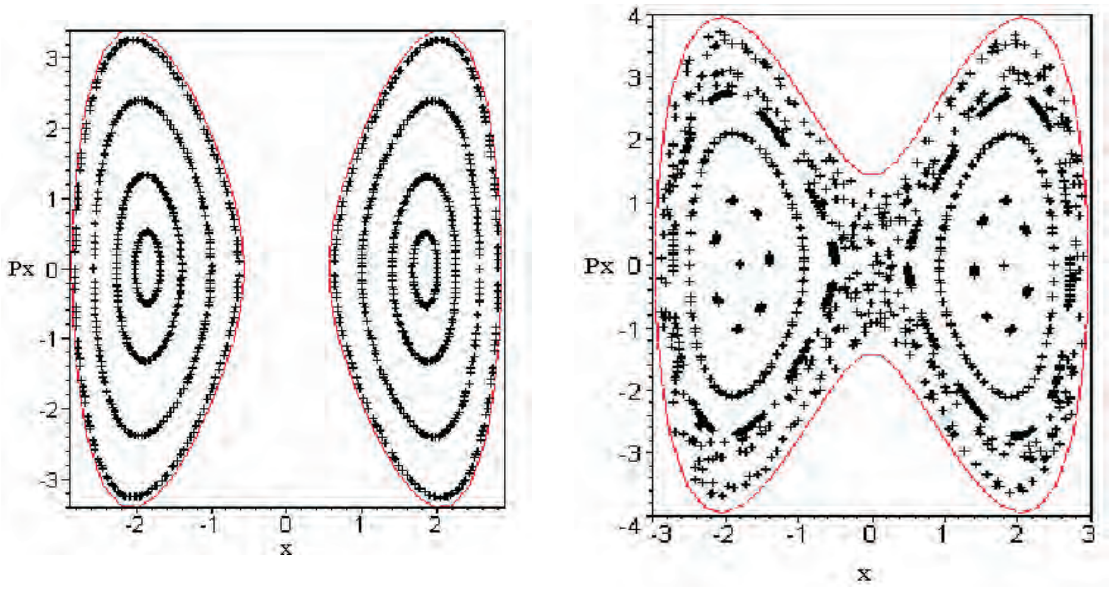



Рис. 2. Сечения Пуанкаре для классического гамильтониана (1), (2): a) для восьми регулярных траекторий при значении полной энергии $E = -1$; b) для одной хаотической траектории, шести квазипериодических и двух периодических при полной энергии $E = 1$.

**Основные уравнения.** Квантовым аналогом функции Гамильтона (1), (2) является дифференциальный оператор Шредингера

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + V(x, y) \tag{3}$$

с той же функцией (2), для которого надо решить задачу на собственные значения

$$\hat{H}\psi(x, y) = E\psi(x, y), \tag{4}$$

где $E$ и $\psi(x, y)$ - собственные значения и собственные функции, квадратично интегрируемые на интервале $(-\infty, \infty)$.

В полярных переменных $(r, \varphi)$ после замены $\psi(r, \varphi) = u(r, \varphi)/\sqrt{r}$ уравнение Шредингера (3) перепишется как

$$\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) + V(r, \varphi)\right] u(r, \varphi) = Eu(r, \varphi). \tag{5}$$

Согласно методу самосогласованного базиса его решение ищем в виде тригонометрического ряда

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0(r)}{2} + \sum_{l=1}[A_l(r)cosl\varphi + B_l(r)sinl\varphi], \tag{6}$$

коэффициенты которого являются функциями от радиальной переменной $r$. Используя ортогональность угловых базисных функций, получаем, в общем бесконечную, однородную систему дифференциальных уравнений для определения неизвестных функций $A_0(r)$, $A_l(r)$ и $B_l(r)$, $l = 1, 2, 3, \ldots, N, \ldots$.

Так как гамильтониан уравнения (3) имеет $C_{2v}$ симметрию, то его собственные значения и функции будем классифицировать по четырем неприводимым представлениям этой группы: $A_1, A_2, B_1, B_2$. В результате для функций $A_0(r)$, $A_l(r)$ и $B_l(r)$ получаем следующие бесконечные системы дифференциальных уравнений второго порядка.

В качестве примера приведем систему для состояний $B_1$-типа:

$$A_1^{''} + A_1\alpha_1 + A_3(\beta + \gamma) + \gamma A_5 = 0,$$

$$A_l^{''} + A_l\alpha_l + \beta(A_{l-2} + A_{l+2}) + \gamma(A_{l-4} + A_{l+4}) = 0, \quad l = 3, 5, 7, \ldots \tag{7}$$

где $\alpha_l(r, E) = 2E - \frac{4l^2-1}{4r^2} - ar^2 + \frac{a^{'}}{2}r^2 - \frac{b}{4}r^4 - 2cr^4$, $\beta = \frac{a^{'}}{4}r^2$, $\gamma = \frac{b}{8}r^4$.

Систему (7) эквивалентным образом можно записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$z_2^{'} + \alpha_1 z_1 + \beta z_3 + \gamma(z_3 + z_5) = 0,$$

$$z_{l+1}^{'} + \alpha_l z_l + \beta(z_{l-2} + z_{l+2}) + \gamma(z_{l-4} + z_{l+4}) = 0, \quad l = 3, 5, 7, \ldots \tag{8}$$

где $A_l = z_l$, $B_l^{''} = z_{l+1}^{'}$.

Обрезая систему (8) до $2N$ уравнений, получим конечную и однородную систему дифференциальных уравнений первого порядка относительно неизвестных функций $z_k(r)$, причем функции $\alpha_l$ содержат еще не определенные собственные значения $E$.

Далее для конкретного значения $E$ из заранее определенного диапазона решаем задачу Коши для системы (8) с подходящими начальными условиями в точке $r_0$ и находим фундаментальную систему решений $z_k^{(j)}(r, E)$, $(k, j = 1, 2, 3, \ldots, 2N)$, где верхний индекс $j$ нумерует решения для $k$-й функции. Тогда, как известно, общее решение системы дифференциальных уравнений первого порядка определяется как

$$z_k(r, E) = \sum_{j=1}^{2N} C_j z_k^{(j)}(r, E), \quad j = 1, \ldots, 2N. \tag{9}$$

Полагая в уравнениях (9) функции $z_k(r, E)$ с нечетными номерами $k = 2m-1$, $(m = 1, 2, 3, \ldots, N)$ в начальной $r_0$ и конечной $r_{end}$ точках интегрирования равными нулям, получаем однородную линейную алгебраическую систему относительно неизвестных коэффициентов $C_j$, $(j = 1, 2, 3, \ldots, N)$:

$$C_1 z_1^{(1)}(r_0,E) + C_2 z_1^{(2)}(r_0,E) + \cdots\cdots\cdots + C_{2N} z_1^{(2N)}(r_0,E) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_1 z_1^{(2N-1)}(r_0,E) + C_2 z_{2N-1}^{(2)}(r_0,E) + \cdots + C_{2N} z_{2N-1}^{(2N)}(r_0,E) = 0$$
$$C_1 z_1^{(1)}(r_{end},E) + C_2 z_1^{(2)}(r_{end},E) + \cdots + C_{2N} z_1^{(2N)}(r_{end},E) = 0 \qquad (10)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_1 z_{2N-1}^{(1)}(r_{end},E) + C_2 z_{2N-1}^{(2)}(r_{end},E) + \cdots + C_{2N} z_{2N-1}^{(2N)}(r_{end},E) = 0$$

Нетривиальные решения системы (10) относительно $C_j$ определяются из равенства нулю соответствующего детерминанта, которое выполняется для определенных значений $E_j$, составляющих спектр исходного уравнения Шредингера (4). Решения, соответствующие данному значению энергии являются собственными или волновыми функциями того же уравнения (4).

**Результаты.** Нами разработан алгоритм и составлена численно-аналитическая программа $SELFA-C2V$ на MAPLE, с помощью которой методом самосогласованного базиса были вычислены нижайшие энергетические уровни и волновые функций для всех четырех типов. Однако в качестве примера приведены некоторые результаты для

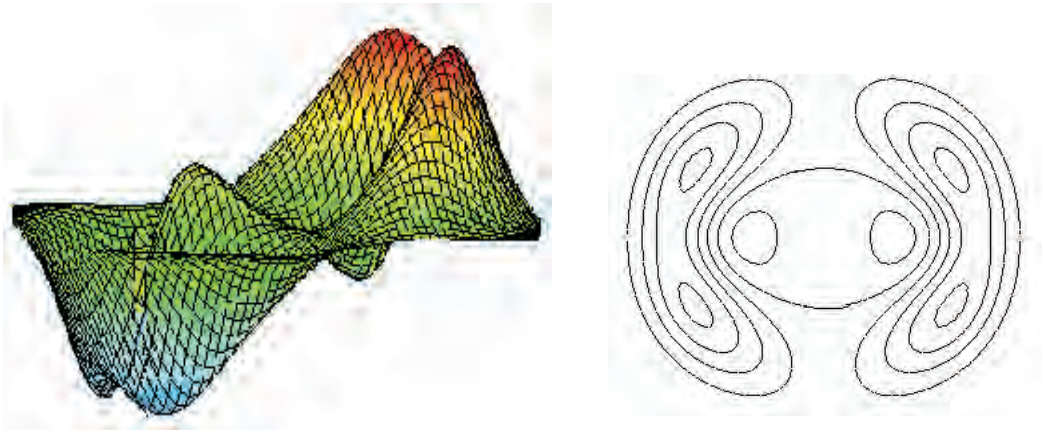


Рис. 3. Рельеф и изолинии волновой функции $B_1$-типа для третьего уровня $E = 1.196685$.

состояний $B_1$- типа: в Табл. 1 приведена зависимость величин энергетических уровней от $r_{end}$, а на Рис. 3 показана волновая функция.

Табл. 1. Величины нижайших энергетических уровней $B_1$-типа

| $n=1$ | $n=2$ | $n=3$ | $n=4$ | $n=5$ | $n=6$ |
|---|---|---|---|---|---|
| -3.8972427 | -0.8072656 | 1.1966853 | 2.0562031 | 4.0390486 | 5.3008079 |

Авторы глубоко признательны профессору Пузынину И.В. и участникам его семинара в ЛИТ ОИЯИ за плодотворное и полезное обсуждение.

# Список литературы

[1] *И.Н. Беляева, Ю.А. Уколов, Н.А. Чеканов.* Вестник ХГТУ. 2005. Вып. 2(22). С. 43–47.

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЯВЛЕНИЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ТРЕХСЛОЙНОЙ СТРУКТУРЕ*

**И.В. Бурылова, Е.А. Полякова, М.А. Степович**

Калужский государственный педагогический университет им. К.Э. Циолковского, 248023, Россия, г. Калуга, ул. Степана Разина, д. 26, m.stepovich@kspu.kaluga.ru

**Введение.** Явления тепломассопереноса математически могут быть описаны уравнением вида

$$\hat{\mathbf{D}}\,[f(z)] = u(z), \tag{1}$$

где $\hat{\mathbf{D}}$ — линейный дифференциальный оператор порядка $p$, в общем случае с переменными коэффициентами:

$$\hat{\mathbf{D}} = \sum_{k=0}^{p} a_{i_1 i_2 \ldots i_m}(z)\, \frac{\partial^{(k)}}{\partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2} \ldots \partial z_m^{i_m}},$$

$$i_1 + i_2 + \cdots + i_m = k, \quad k = \overline{0,\, p},$$

$$z_i \in \Omega, \quad \Omega = (0,\, \infty), \quad f(z),\, u(z) \in L_2(\Omega).$$

Функциональное пространство $L_2(\Omega)$ представляет собой полное линейное нормированное (гильбертово) пространство, в котором

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} = \left\{ \int\limits_{\Omega} |f(z)|^2 \, dz \right\}^{1/2} < \infty.$$

Для рассматриваемых планарных структур дифференциальные уравнения, описывающие явления тепломассопереноса поперек слоев, являются обыкновенными дифференциальными уравнениями, константы интегрирования в которых определяются из условий:

а) для уравнения теплопроводности

$$T(\infty) = T_0 = \text{const}, \quad \int\limits_0^{\infty} \rho(z)\, dz = G_0 = \text{const}\,.$$

Здесь определяется распределение температуры $T$ по глубине $z$ и $f(z) \equiv T(z)$, $T_0$ — исходная температура материала (или, что то же самое, его температура на достаточно большом расстоянии от источника тепла, который находится либо на поверхности, либо в приповерхностной области материала), $G_0$ — мощность, выделяемая в материале;

б) для уравнения диффузиии

$$\frac{\partial\, \Delta p(0)}{\partial z} \sim \Delta p(0), \quad \Delta p(\infty) = 0.$$

*Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области (грант № 04–03–97210).

Здесь определяется распределение по глубине плотности $\Delta p(z)$ диффундирующего вещества и $f(z) \equiv \Delta p(z)$; на достаточно большом расстоянии от поверхности диффундирующее вещество отсутствует.

Правая часть уравнения (1) определяет функцию генерации (тепла или диффундирующего вещества) в материале и может задаваться различным образом. Для рассматриваемого случая наиболее удобной является использование т.н. модели независимых источников, согласно которой функция генерации задается в виде [1, 2]:

$$u(z) = -\rho(z)\delta(z - z_0).$$

Здесь $\rho(z)$ — плотность мощности, выделяемой внешним источником в материале, а $\delta(z - z_0)$ — дельта–функция Дирака. Ранее такой подход использовался при моделировании диффузии неосновных носителей заряда (ННЗ), генерированных широким электронным пучком в однородном [3] и двухслойном [4] полупроводниковых мишенях киловольтными электронами; в настоящей работе этот подход реализуется на примере решения аналогичной задачи в трехслойной полупроводниковой структуре.

**Постановка задачи.** Следуя [3], распределение $\Delta p(z, z_0)$ ННЗ, генерированных широким электронным пучком в бесконечно тонком слое полупроводника, будем описывать дифференциальным уравнением

$$D\,\frac{d^2\,\Delta p(z, z_0)}{dz^2} - \frac{\Delta p(z, z_0)}{\tau} = -\rho(z)\,\delta(z - z_0) \tag{2}$$

с граничными условиями

$$D\,\frac{d\,\Delta p(0, z_0)}{dz} = v_s\,\Delta p(0, z_0), \qquad \Delta p(\infty, z_0) = 0. \tag{3}$$

Здесь $D$, $\tau$ и $v_s$ — коэффициент диффузии, время жизни и скорость поверхностной рекомбинации ННЗ соответственно.

Использование $\delta$–функции позволяет не только адекватно описать рассматриваемое физическое явление, но и получить решение задачи (2), (3) в аналитическом виде, после чего искомое распределение ННЗ в результате их диффузии в полупроводнике находится как

$$\Delta p(z) = \int_0^\infty \Delta p(z,\ z_0)\,dz_0. \tag{4}$$

**Метод решения задачи.** Для описания распределений $\Delta p(z, z_0)$ в трехслойной структуре воспользуемся подходом, описанным в [4]. Как и в этой работе, внутри каждого слоя параметры полупроводника будем считать постоянными. Одну константу интегрирования для первого слоя определим из первого граничного условия (3), одну постоянную интегрирования для третьего слоя — из второго условия (3), а остальные — из условий непрерывности функции $\Delta p(z, z_0)$ на границе первого и второго слоев $z_1$ и на границе второго и третьего слоев $z_2$:

$$\lim_{z \to z_i - 0} \Delta p(z, z_0) = \lim_{z \to z_i + 0} \Delta p(z, z_0), \quad i = 1,\ 2.$$

**Полученные результаты.** Ниже представлены некоторые результаты моделирования для случая, когда источник ННЗ находится в первом слое трехслойной структуры, т.е. когда $z_0 < z_1$:

$$\Delta p_{11}(z, z_0) = C_1(z_0)\exp\left(\frac{z}{L_1}\right) + C_2(z_0)\exp\left(\frac{-z}{L_1}\right), \quad z \in [0,\, z_0],$$

$$\Delta p_{12}(z, z_0) = C_3(z_0)\exp\left(\frac{z}{L_1}\right) + C_4(z_0)\exp\left(\frac{-z}{L_1}\right), \quad z \in [z_0,\, z_1],$$

$$\Delta p_2(z, z_0) = C_5(z_0)\exp\left(\frac{z}{L_2}\right) + C_6(z_0)\exp\left(\frac{-z}{L_2}\right), \quad z \in [z_1,\, z_2],$$

$$\Delta p_3(z, z_0) = C_7(z_0)\exp\left(\frac{z}{L_3}\right) + C_8(z_0)\exp\left(\frac{-z}{L_3}\right), \quad z \in [z_2,\, \infty).$$

Константы $C_i = C_i(z_0,\, \mathbf{\Theta})$, где $\mathbf{\Theta}$ — вектор параметров данного полупроводникового слоя, $i = \overline{1,\, 8}$.

Например

$$C_1(z_0,\, \mathbf{\Theta}) = \frac{\rho(z_0)\left[\exp\left(\dfrac{2z_0}{L_2}\right) + \dfrac{1-S_2}{1+S_2}\right]}{\exp\left(\dfrac{2z_0}{L_2}\right)\left(\dfrac{D_3}{L_3} + \dfrac{D_2}{L_2}\right) + \dfrac{1-S_2}{1+S_2}\left(\dfrac{D_3}{L_3} - \dfrac{D_2}{L_2}\right)} \times$$

$$\times \frac{1}{\exp\dfrac{z_0}{L_1} + \dfrac{1-S_1}{1+S_1}\exp\left(-\dfrac{z_0}{L_1}\right)}.$$

Здесь $\mathbf{\Theta} = \{L_1,\, L_2,\, L_3,\, D_2,\, D_3,\, S_1,\, S_2\}$, $S_1 = v_{s1}\tau_1/L_1$ — приведенная скорость поверхностной рекомбинации ННЗ в первом слое, а $S_2$ — подобная характеристика на границе первого и второго слоев структуры; $L = \sqrt{D\tau}$.

Аналогичные результаты получены для случаев, когда источник ННЗ находится во втором и в третьем материалах структуры.

Проверка полученных результатов проведена численно с использованием как выражений для распределений $\Delta p(z, z_0)$, так и формулы (4). В качестве эталонных использованы аналогичные выражения, полученные для двухслойной структуры; отметим, что справедливость этих выражений была подтверждена ранее [4]: в предельных случаях бесконечно тонкого или бесконечно толстого первого слоя были получены выражения, приведенные в [3] для однородного полупроводника.

Полученные в результате проверки данные позволяют говорить о правильности описанных выше результатов для трехслойной структуры и возможности их использования для моделирования явлений тепломассопереноса в рассматриваемом объекте исследования.

**Заключение.** Описан основанный на использовании метода независимых источников способ решения обыкновенного дифференциального уравнения тепломассопереноса, позволяющий в случае планарного источника получить аналитическое решение для многослойной полупроводниковой структуры. Моделирование распределений неосновных носителей заряда, генерированных широким электронным пучком, после их диффузии в такой структуре, подтверждает перспективность использования разработанного подхода для описания явлений тепломассопереноса.

# Список литературы


[1] *Н.Н. Михеев, Ю.Г. Дорогова.* Электронная техника. Сер. Материалы. 1988. Вып. 4 (233) С. 44–48.

[2] *Н.Н. Михеев, В.И. Петров, М.А. Степович.* Известия РАН. Сер. физическая. 1991. Т 55. № 8. С. 1474–1482.

[3] *А.А. Белов, В.И. Петров, М.А. Степович.* Известия РАН. Сер. физическая. 2002. Т 66. № 9. С. 1317–1322.

[4] *М.А. Степович, М.Г. Снопова, А.Г. Хохлов.* Прикладная физика. 2004. № 3. С. 61–65.


## К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПАРАМЕТРОВ В НЕОДНОРОДНОМ ТРЕЩИНОВАТО–ПОРИСТОМ ПЛАСТЕ


**Г.В. Голубев**

Казанский государственный технический университет имени А.Н. Туполева, Казань


Трещиновато-пористые пласты представляют весьма распространенный вид коллекторов нефти и газа. Трещиновато-пористая — это пористая среда, пронизанная густой сеткой мелких трещин. Особенностью ее является то, что главные запасы нефти находятся в пористых блоках, а основное движение нефтегазового потока происходит по трещинам. В качестве математической модели среды примем модель Баренблатта—Желтова. Будем считать, что движение однородной жидкости в этой среде таково, что фильтрация в трещинах описывается нелинейным двучленным законом Форхгеймера. В данной работе возьмем закон Форхгеймера в виде, разрешенном по отношению к скорости фильтрации [1]

$$\bar{\nu}_1 = -B_1 \nabla p, \text{ где } B_1 = (\sqrt{1 + 4|\nabla p|\rho\beta u^3/\mu^2} - 1)\mu/2\beta\rho|\nabla p|u, \sqrt{k_1} = u \tag{1}$$

Здесь использованы обозначения: $\bar{\nu}_1$ — скорость фильтрации, $p$ — функция давления, $k_1$ — проницаемость трещин, $\mu$ — вязкость жидкости, $\rho$ — ее плотность, $\beta$ — постоянная.

Для движения жидкости в пористых блоках можно предложить различные законы фильтрации: Дарси, параметрический, криволинейный. Закон Дарси будет несколько упрощать соответствующие вычислительные алгоритмы, а параметрический и криволинейный законы лучше описывать проявления аномальных свойств пластовой нефти при фильтрации в блоках.

Нелинейный криволинейный закон, который мы далее будем использовать, математически записывается следующим образом

$$\bar{\nu}_2 = \begin{cases} -\dfrac{k_2}{\mu}\left(1 - \dfrac{\beta_1\mu_0}{|\nabla p|}\right)\nabla p & \text{при} |\nabla p| \geqslant \beta_1, \\ -\dfrac{k_2}{\nu}\dfrac{|\nabla p|}{\beta_1 + \sqrt{\beta_1^2 + |\nabla p|^2}}\nabla p & \text{при} |\nabla p| < \beta_1; \end{cases} \tag{2}$$

где $\bar{\nu}_2$ — скорость фильтрации в блоках, $k_2$ — коэффициент проницаемости блоков, $\nu$ — динамическая вязкость жидкости при малых градиентах давления, $\beta_1 = \alpha/\sqrt{k_2}$ — начальный градиент давления, $\mu_0, \alpha,$ — некоторые постоянные.

Из (1) и (2) для суммарного потока получаем

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}_1 + \bar{\nu}_2 = -B_2 \nabla p, \tag{3}$$

где функция $B_2$ получается из (1) и (2).

Будем считать коэффициенты проницаемости и трещин и блоков переменными величинами, функциями координат: $k_1 = k_1(x, y), k_2 = k_2(x, y)$. Отношение $k_1/\mu = c_1$ обычно называют коэффициентом текучести (или подвижности). Он тоже является функцией координат: $c_1 = c_1(x, y)$.

Для вывода основного уравнения фильтрации в трещиновато-пористой среде при законах фильтрации (1) и (2) используем равенство (3) и соотношение, которое получается из уравнения неразрывности суммарного потока и зависимостей плотности жидкости и пористой среды от давления. Оно получено в работе [2] и может быть использовано или для определения функции давления или для определения фильтрационных параметров. В данном сообщении обсудим вторую из этих задач. В каждое из полученных уравнений (в областях больших и малых градиентов) входят два фильтрационных параметра — $c_1$ и $k_2$ (или $k_1$ и $k_2$) Конечно, хотелось бы определять некоторый комплекс, который характеризует фильтрационные свойства и трещин и блоков. Если считать давление $p$, а также величины $\alpha$, $\beta$, $\mu$, $\nu$, $\mu_0$, $f$ в этих уравнениях известными, то каждое из них будет содержать по две неизвестные функции: $c_1$ и $k_2$ или $k_1$ и $k_2$. Поскольку две неизвестные функции из одного дифференциального уравнения при данном подходе определить не удается, то можно рассматривать следующие две задачи:

1. задачу определения проницаемости трещин $k_1$ в областях больших и малых градиентов по другим известным и входящим в уравнения величинам и данным Коши для функции $k_1$,

2. задачу определения проницаемости блоков $k_2$ в областях больших и малых градиентов по другим известным в уравнениях величинам и данным Коши.

Дифференциальные уравнения получаются одного вида и записываются

$$a_i(x, y, k_i)\frac{\partial k_i}{\partial x} + b_i(x, y, k_i)\frac{\partial k_i}{\partial y} + \Phi_i(x, y, k_i) = 0 \tag{4}$$

где индекс $i = 1$ соответствует трещинам, а индекс $i = 2$ — блокам. В качестве вариантов вместо функции $k_1$ может быть $c_1$. Уравнения (4) называются квазилинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка. Для них естественной является постановка задачи Коши, т.е. уравнения должны быть дополнены данными Коши

$$k_i|_\Gamma = \varphi(\tau), \tag{5}$$

где носитель данных Коши Г ни в одной точке не принимает характеристического направления, $\tau$ — дуговая абсцисса линии Г.

Исследуемую задачу сформулируем следующим образом. В области фильтрации Д с границей $\partial$Д найти функцию $k_i$, удовлетворяющую в ней дифференциальному уравнению (4) и дополнительному условию (5).

Задача определения функции $c_1$ при $|\nabla p| \geqslant \beta_1$ математически записывается так

$$a(x,y,c_1)\frac{\partial c_1}{\partial x} + b(x,y,c_1)\frac{\partial c_1}{\partial y} + \Phi(x,y,c_1) = 0, c_i|_\Gamma = \varphi(\tau) \tag{6}$$

где $a = \dfrac{\partial p}{\partial x} \cdot 2\beta|\nabla p|^3$, $b = \dfrac{\partial p}{\partial y} \cdot 2\beta|\nabla p|^3$, $\Phi = a_{11}p_{xx} + a_{22}p_{yy} + (k_{2x}p_x + k_{2y}p_y) \times$
$\times (1/\mu - \omega/2\sqrt{k_2}|\nabla p|) \cdot 2\beta|\nabla p|^3\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c_1} - 2\beta f|\nabla p|^3\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c_1}$, $\omega = \mu_0\alpha/\mu$.

Здесь нижние индексы $x$, $y$ означают дифференцирование по соответствующей переменной, $a_{11}$ и $a_{22}$ — некоторые достаточно сложного вида функции. Аналогичным образом записывается задача определения функции $c_1$ при $|\nabla_p| < \beta_1$, а соответствующее уравнение для удобства ссылки на него обозначим (7).

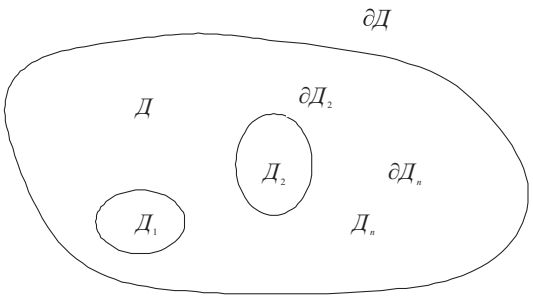


Рис. 1. Область фильтрации.

Решение начинается с определения областей больших и малых градиентов (первый этап). Поскольку распределения давления считаются известными, то покрывая область фильтрации достаточно густой сеткой, можно определить с помощью компьютерных расчетов значения градиента давления в ее узлах (задача табулирования функции). По результатам этих расчетов находятся области больших и малых градиентов давления. При этом, достаточно хорошо известно, что окрестности скважин характеризуются большими градиентами давления, а отдаленные от них зоны, близкие к контуру питания — меньшими. На рис. 1 области, где $|\nabla p| \geqslant \beta_1$, обозначены $Д_1$, $Д_2$, …, $Д_n$, а в области $Д - \sum Д_i \quad |\nabla p| < \beta_1$. Возможно также частичное или полное слияние областей $Д_i$. На линиях $\partial Д_i (i = 1, n) \quad |\nabla p| = \beta_1$. Тогда условие (5) должно быть добавлено только к уравнению (7) и задача Коши рассматривается в области $Д - \sum Д_i$. Используя какой-либо численный алгоритм, ее можно решить и определить, в частности, значения функции $c_1$ на границах областей $Д_i$ (второй этап). После его завершения будут известны функции

$$c_1|_{\partial Д_i} = \varphi_i(\tau_i) \tag{8}$$

Далее в областях $Д_i$ уже решаются уравнения (6) с данными Коши (8) (третий этап). Так выглядит алгоритм решения задачи в общем виде, складываясь из трех последовательных этапов. Для получения численного решения задачи на втором и третьем этапах могут быть использованы: метод конечных разностей, проекционно–разностный метод, различные варианты метода интегральных соотношений (МИС) и др. Разберем алгоритм использования МИС-а. При его применении исходное дифференциальное уравнение целесообразно представить в дивергентной форме записи

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}-1}{2\beta|\nabla p|} + \frac{\sqrt{k_2}}{\mu}\left(\sqrt{k_2} - \frac{\mu_0\alpha}{|\nabla p|}\right)\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\frac{\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}-1}{2\beta|\nabla p|}+\frac{\sqrt{k_2}}{\mu}\left(\sqrt{k_2}-\mu_0\alpha/|\nabla p|\right)\right)\frac{\partial p}{\partial y}\right]=f+\beta^*\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (9)$$

Присутствие последнего члена в правой части говорит о том, что жидкость считается сжимаемой. МИС может быть применен для рассматриваемой задачи в различных его вариантах: с использованием продольных и поперечных систем МИС-а, МИС в криволинейных координатах, в частности, полярных, с использованием линейных сплайн–функций, квадратичных интерполяций и т.д. Применим обобщенный метод интегральных соотношений. Схема его использования выглядит так: по одной переменной в дифференциальном уравнении производится точное интегрирование, а по другой — аппроксимация. Этим достигается понижение размерности задачи, поскольку аппроксимирующая система имеет меньшее число непрерывных переменных. Область фильтрации Д$_i$ разобьем на полосы некоторыми криволинейными линиями, конфигурацию которых целесообразно выбирать в соответствии с формой границы области. Полосы могут покрывать места значительного изменения функций, например, области резкого сгущения изобар, более густо. Будем считать, что каждая разграничительная линия пересекается с прямой $x = \text{const}$ только один раз. Типичная криволинейная полоса имеет границы $y = y_s(x)$ и $y = y_{s+1}(x)$. Уравнение (9) умножим на произвольную функцию $\chi_n(y)$, которая может быть кусочно-непрерывной. Далее проинтегрируем уравнение (9) по $y$ поперек всей области Д$_i$ от нижней границы $y = \eta_1(x)$ до верхней $y = \eta_2(x)$

$$\int\limits_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)}\left[\Omega\frac{\partial p}{\partial x}\right]_x\chi_n(y)dy+\int\limits_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)}\left[\Omega\frac{\partial p}{\partial y}\right]_y\chi_n(y)dy=\int\limits_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)}\rho_1\chi_n(y)dy, \qquad (10)$$

где для кратности обозначено

$$\Omega=\frac{\sqrt{1+4\beta|\nabla p|c}-1}{2\beta|\nabla p|}+\frac{\sqrt{k_2}}{\mu}\left(\sqrt{k_2}-\frac{\mu_0\alpha}{|\nabla p|}\right),\rho_i=f+\beta^*\frac{\partial p}{\partial t},$$

а нижний индекс означает дифференцирование по $x$ или $y$.

Функции $\chi_n(y)$ называются сглаживающими или весовыми. Их выбирают в соответствии с ожидаемым поведением искомых функций. В результате можно добиться требуемой точности меньшим числом полос. Кроме того, система линейно-независимых функций ($\chi_1(y)$, $\chi_2(y)$, …, $\chi_n(y)$) должна выбираться замкнутой. Выполняя в уравнении (10) в первом интеграле дифференцирование по параметру, а во втором — интегрирование по частям, получим

$$\frac{d}{dx}\int\limits_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)}\chi_n(y)\Omega\frac{\partial p}{\partial x}dy-\left(\chi_n\Omega\frac{\partial p}{\partial x}\right)_M\frac{d\eta_2(x)}{dx}+\left(\chi_n\Omega\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0+$$

$$+\left(\chi_n\Omega\frac{\partial p}{\partial y}\right)_M-\left(\chi_n\Omega\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0-\int\limits_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)}\Omega\frac{\partial p}{\partial y}\frac{d\chi_n}{dy}=\int\limits_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)}\rho_1\chi_n(y)dy,(n=\overline{1,M}) \qquad (11)$$

Если функция $\chi_n(y)$ является кусочно-непрерывной, то в последнем члене левой части интеграл Римана следует заменить интегралом Стилтьеса.

Для функций $\Omega\dfrac{\partial p}{\partial x}$ и $\Omega\dfrac{\partial p}{\partial y}$ применим интерполяционные формулы, конкретный вид которых остается в нашем распоряжении. Значения функции для любого y будет выражаться при этом через ее значения на линиях $y = y_0, \ldots, y = y_M$:

$$\Omega\frac{\partial p}{\partial x} = \sum_{j=0}^{M}\left(\Omega\frac{\partial p}{\partial x}\right)_j \beta_j(y) + R_{1M}, \quad \Omega\frac{\partial p}{\partial y} = \sum_{j=0}^{M}\left(\Omega\frac{\partial p}{\partial y}\right)_j \beta_j(y) + R_{2M}, \tag{12}$$

где вид интерполяционных функций $\beta_j(y)$ определяется способом интерполяции (или базисными функциями). Величины $(\Omega\partial p/\partial x)_j$, $(\Omega\partial p/\partial y)_j$, $(j = \overline{0, M})$ в (12) зависят только от $x$, а остаточными членами $R_{1M}$, $R_{2M}$ в дальнейшем пренебрежем.

Подставляя выражения (12) в интегральные соотношения (11), получим следующую аппроксимирующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{M}\alpha_{nj}\left(\Omega\frac{\partial p}{\partial x}\right)_j - \left(\chi_n\Omega\frac{\partial p}{\partial x}\right)_M \frac{d\eta_2(x)}{dx} + \left(\chi_n\Omega\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 \frac{d\eta_1(x)}{dx} +$$

$$+\left(\chi_n\Omega\frac{\partial p}{\partial y}\right)_M - \left(\chi_n\Omega\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 + \sum_{j=0}^{M}\omega_{nj}\left(\Omega\frac{\partial p}{\partial y}\right)_j = \int\limits_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)}\rho_1\chi_n(y)dy, \tag{13}$$

$(n = \overline{1, M})$

$$\alpha_{nj} = \int\limits_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)}\chi_n(y)\beta_j(y)dy, \quad \omega_{nj}(x) = \int\limits_{\eta_1(x)}^{\eta_2(x)}\chi_n^1(y)\beta_j(y)dy,$$

$y_M(x) = \eta_2(x)$, $y_0(x) = \eta_1(x)$.

К системе (13) добавляются данные Коши.

Заметим, что при алгебраической интерполяции в качестве $\beta_j(y)$ можно взять, например, множители Лагранжа. В интегральные соотношения (11) не входят производные от неизвестной функции $c_1$, а весовые функции $\chi_n(y)$ берутся так, чтобы интегралы в этих соотношениях сходились. Поэтому в случае, когда функция $c_1$ имеет разрывы первого рода (для кусочно-однородного пласта), интегралы являются непрерывными функциями и при применении МИС-а никаких осложнений не возникает. Далее можно произвести некоторую конкретизацию этого алгоритма путем выбора определенной формы области фильтрации, базисных функций (например, одномерных линейных сплайнов) и т.д. Для этих случаев записаны более конкретизированные аппроксимирующие системы ОДУ. Таким образом, задача приводится к виду, когда дальнейшее ее решение осуществляется с помощью механизированных машинных вычислений. При расчете примеров по указанному алгоритму целесообразно прежде всего рассмотреть такие, для которых существует точное аналитическое (эталонное) решение задачи. Для получения их запишем основное уравнение фильтрации в трещиновато–пористой среде при плоско-радиальном течении к центральной скважине в круговом пласте.

Оно имеет следующий вид

$$\frac{d}{dr}\left\{r\left[\left(\sqrt{1+4\beta k_1(r)\frac{dp}{dr}/\mu}-1\right)\frac{dp}{dr}/2\beta\left|\frac{dp}{dr}\right|+k_2(r)\frac{dp}{dr}/\mu\right]\right\}=0 \tag{14}$$

Это равенство дважды интегрируется, определяются произвольные постоянные, и решение записывается в следующем виде

$$p=p_k+\frac{\mu}{2\beta}D(r)-\frac{\mu}{2\beta}D_1(r)-\frac{\mu}{2\beta}D_2(r)+\frac{\mu Q}{2\pi h}D_3(r), \tag{15}$$

где введены обозначения $D(r)=\int\limits_{r_k}^{r}\frac{1}{k_2(r)}\sqrt{\left(\frac{k_1(r)}{k_2(r)}+1\right)^2-\frac{2\beta Q k_1(r)}{\pi h r k_2(r)}}dr\,,$

$D_1(r)=\int\limits_{r_k}^{r}\frac{k_1(r)}{k_2^2(r)}dr\,,\quad D_2(r)=\int\limits_{r_k}^{r}\frac{dr}{k_2(r)}\,,\quad D_3=\int\limits_{r_k}^{r}\frac{dr}{rk_2(r)}\,.$

Если функции $k_1(r)$ и $k_2(r)$ имеют сложный вид, то интегралы $D(r)$, $D_1(r)$, $D_2(r)$, $D_3(r)$ вычисляются только численно. Можно исследовать задачу при линейном и экспоненциальном законах изменения коэффициентов проницаемости и предложить следующие варианты для $k_1(r)$ и $k_2(r)$:

1. $k_1(r)=a_1(r+b_1),\quad k_2(r)=a_2(r+b_2);$
2. $k_1(r)=a_1(r+b_1),\quad k_2(r)=a_2e^{b_2r};$
3. $k_1(r)=a_1e^{b_1r},\quad k_2(r)=a_2(r+b_2);$
4. $k_1(r)=a_1e^{b_1r},\quad k_2(r)=a_2e^{b_2r}.$

Распределения давления в этих случаях будут иметь соответственно следующий вид

1.
$$p=p_k-\frac{\mu}{2\beta a_2}\ln\frac{r+b_2}{r_k+b_2}\left(\frac{a_1}{a_2}+1-\frac{Q\beta}{\pi h b_2}\right)-\frac{\mu a_1}{2\beta a_2^2}\frac{(b_1-b_2)(r-r_k)}{(r_k+b_2)(r+b_2)}+ \tag{16}$$
$$+\frac{\mu Q}{2\pi h a_2 b_2}\ln\frac{r}{r_k}+\frac{\mu}{2\beta}D(r);$$

2.
$$p=p_k+\frac{\mu a_1}{4\beta a_2^2 b_2}\left[\left(r+\frac{1}{2b_2}+b_1\right)e^{-2b_2r}-\left(r_k+\frac{1}{2b_2}+b_1\right)^{-2b_2r_k}\right]- \tag{17}$$
$$-\frac{\mu}{2\beta a_2 b_2}\left(e^{-b_2r_k}-e^{-b_2r}\right)+\frac{\mu Q}{2\pi h a_2}\left[E_i(-b_2r)-E_i(-b_2r_k)\right]+\frac{\mu}{2\beta}D(r);$$

3.
$$p=p_k-\frac{\mu a_1}{2\beta}\left\{-\frac{e^{b_1r}}{r+b_2}+\frac{e^{b_1r_k}}{r_k+b_2}+e^{b_1b_2}b_1[E_i(b_1(r+b_2))-E_i(b_1(r_k+b_2))]\right\}- \tag{18}$$
$$-\frac{\mu}{2\beta a_2}\ln\frac{r+b_2}{r_k+b_2}+\frac{\mu Q}{2\pi h a_2 b_2}\ln\frac{r(r_k+b_2)}{r_k(r+b_2)}+\frac{\mu}{2\beta}D(r);$$

4.

$$p = p_k - \frac{\mu a_1}{2\beta a_2^2(b_1 - 2b_2)}\left[e^{(b_1-2b_2)r} - e^{(b_1-b_2)r_k}\right] - \frac{\mu}{2\beta a_2 b_2}\left(e^{-b_2 r_k} - e^{b_2 r}\right) + \qquad (19)$$

$$+\frac{\mu Q}{2\pi h a_2}\left[E_i(-b_2 r) - E_i(-b_2 r_k)\right] + \frac{\mu}{2\beta}D(r)$$

Здесь $E_i$ — интегральная показательная функция, а $D(r)$ — обозначенный ранее интеграл.

В случае $\beta = 0$, т.е. закон Дарси справедлив и в трещинах и блоках, но среда неоднородная, основное уравнение фильтрации принимает вид

$$\operatorname{div}\left[\frac{(k_1(x,y) + (k_2(x,y))h}{\mu}\operatorname{grad} p\right] = f + \beta^* h\frac{\partial p}{\partial t} \qquad (20)$$

Величину $\sigma(x,y) = (k_1 + k_2)h/\mu$ можно назвать гидропроводностью суммарного потока. Методы решения задачи определения функции давления в случае фильтрации несжимаемой жидкости и методы определения гидропроводности суммарного потока по соответствующим наборам исходных данных разобраны в других работах и монографиях.

Из формулы (15) получается также решение для функции давления при плоскорадиальном течении в круговом трещиновато-пористом пласте в случае, когда $k_1$ и $k_2$ постоянные величины:

$$p = p_k + \frac{\mu}{2\beta k_2}\int\limits_{r_k}^{r}\sqrt{\left(\frac{k_1}{k_2}+1\right)^2 - \frac{2\beta Q k_1}{\pi h k_2}\frac{1}{r}}dr + \frac{\mu}{2\beta k_2}\left(\frac{k_1}{k_2}+1\right)(r_k - r) - \frac{\mu Q}{2\pi h k_2}\ln\frac{r_k}{r}$$

Вычисляя входящий в р интеграл, далее получим

$$p = p_k + \frac{\mu}{2\beta k_2}\left(\frac{k_1}{k_2}+1\right)(r_k - r) - \frac{\mu Q}{2\pi h k_2}\ln\frac{r_k}{r} + \frac{\mu(k_1+k_2)}{2\beta k_2^2}\times \qquad (21)$$

$$\times\left[-\sqrt{r_k(r_k - eQ)} + \sqrt{r(r - eQ)} - \frac{eQ}{2}\ln\frac{(\sqrt{r_k - eQ} - \sqrt{r_k})(\sqrt{r - eQ} + \sqrt{r})}{(\sqrt{r_k - eQ} + \sqrt{r_k})(\sqrt{r - eQ} - \sqrt{r})}\right]$$

где обозначено $e = 2\beta k_1 k_2/\pi h(k_1 + k_2)^2$.

При расчете примеров по указанному алгоритму использовались точные аналитические решения (16)–(19) при плоско-радиальном течении в круговом пласте к центральной скважине. Полученное приближенное решение сравнивалось с соответствующим точным в узловых точках области фильтрации. При проведении численных расчетов использовался программный продукт "Mathcad 7.0 Professional". Погрешность приближенного решения в них оказалась в пределах практических требований точности. Более подробно результатам расчетов будет посвящена отдельная публикация.

# Список литературы

[1] *Р.В. Шаймуратов.* Гидродинамика нефтяного трещиноватого пласта. М.: Недра, 1980. 224 с.

[2] *Г.В. Голубев.* К задаче об учете дискретных особенностей логарифмического типа при фильтрации в трещиновато-пористой среде. Труды межд. школ-семинаров МДОЗМФ, вып. 4, изд. Орловск. гос. ун-та, Орел, 2006, с. 30–39.

## СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ МОДЕЛИ БЫСТРОГО ДВИЖЕНИЯ СЫПУЧЕГО МАТЕРИАЛА

**Е.С. Каменецкий, С.Р. Тедеева, В.Н. Хетагуров**

Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН и РСО-Алания,

РСО-Алания, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22

С целью описания движения сыпучего материала в модели мельницы вертикального типа были использованы уравнения Навье — Стокса. Задача решалась в двумерном осесимметричном приближении. Уравнения рассматривались в цилиндрической системе координат в соответствии с геометрией расчетной области: моделируемый корпус мельницы представляет собой вертикальный цилиндр с вращающимся дном в виде чаши; чаша представляет собой усеченный конус с цилиндрическим держателем в центре, который вращается вместе с ней. Решение задачи осуществлялось в переменных вихрь-функция тока с использованием метода конечных разностей. При этом результаты расчетов сравнивались с данными, полученными в экспериментах.

Ввиду значительного отличия свойств сыпучей среды от свойств жидкости, была поставлена задача усовершенствования модели путем учета неньютоновской реологии сыпучей среды.

Этапы решения задачи:

1. Первоначально было сделано предположение о пропорциональности компонент тензора напряжения давлению $\tau \sim kP$, где $\tau$ — компоненты тензора напряжения, $P$ — давление, $k$ — размерный коэффициент. Такое представление реологии сыпучей среды для рассматриваемой задачи, как показали численные расчеты [1], представляется более эффективным, чем общепринятая обобщенная модель Багнолда, в которой сыпучий материал описывается степенной реологической моделью $\tau_{ij} = \mu^n J^{n-1} e_{ij}$, где $\tau_{ij}, e_{ij}, \mu, J, n$ — тензор напряжений, тензор скоростей деформаций, сдвиговая вязкость, интенсивность скоростей деформаций, реологический параметр соответственно [2].

При обезразмеривании уравнений в качестве масштаба длины был взят радиус цилиндра — $R$, масштаба скорости — величина $\omega R$, а масштаба давления — давление столба материала $\rho g H$. Здесь $\omega$ — частота вращения чаши, $\rho$ — плотность материала, $g$ — ускорение свободного падения, $H$ — высота засыпки материала, отсчитываемая от дна чаши. В качестве характерного параметра получен аналог числа Рейнольдса $\Re = \frac{\omega R^2}{kgH}$. Кроме того, при слагаемых с давлением появился коэффициент вида $\frac{gH}{\omega^2 R^2}$.

По этой модели были проведены расчеты для частоты вращения дна $60c^{-1}$ и высоты засыпки материала $Hm = 1,6R$, где $Hm$ — высота засыпки, отсчитываемая от верхнего края чаши.

Оценка степени достоверности полученных в расчете результатов осуществлялась путем сравнения определяемого экспериментально на модели с диаметром рабочей

части $D = 20$мм угла $\beta = \text{arctg}\,\frac{V_\varphi}{V_z}$ с расчетным углом, а также по общему виду картины движения сыпучего материала. В качестве сыпучего материала были использованы полиэтиленовые шарики диаметром $d = 4$мм.

Данная модель дала качественно удовлетворительные результаты — в цилиндре образуется один осесимметричный вихрь. Однако количественно отклонения расчетных значений максимума и минимума угла, выбранного в качестве параметра сравнения, а в особенности точки перехода от области, в которой материал опускается в чашу, к области подъема, т. е. нулевого значения вертикальной скорости, взятых в горизонтальной плоскости на высоте $0,15R$ над срезом чаши, значительны. Кроме того, размеры вихря в вертикальном направлении в расчете значительно превышали реальные и образовывались вторичные вихорьки сверху (рис. 1), что свидетельствовало о необходимости дальнейшего совершенствования модели.

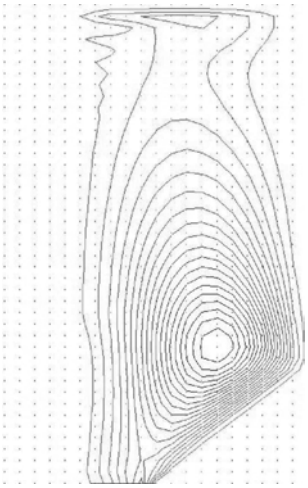


Рис. 1. График линий тока для первого варианта модели.

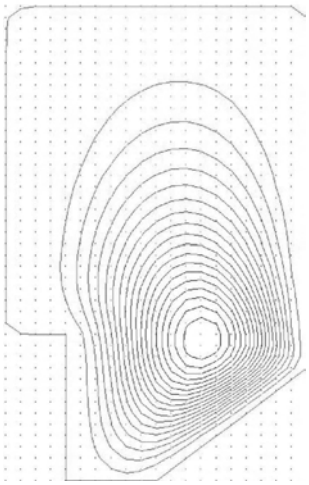


Рис. 2. График линий тока для второго варианта модели.

2. Было предположено, что более верным будет представление коэффициента вязкости как состоящего из двух слагаемых, т. е. одно из которых постоянно, а другое пропорционально давлению: $\tau \sim (\mu_0 + k^* P)$.

В данном случае в безразмерных уравнениях движения возникает два безразмерных параметра, аналогичных числу Рейнольдса, которые были обозначены $\Re 0$ и $\Re 1$. Они имеют следующий вид:

$$\Re 0 = \frac{\rho\omega R^2}{\mu_0}, \quad \Re 1 = \frac{\omega R^2}{kgH}.$$

В этом случае помимо улучшения количественного совпадения минимума и максимума рассматриваемого угла, улучшилось также совпадение формы и размеров расчетного вихря с размерами реального вихря (рис. 2). Однако ошибки по значениям минимума и максимума угла $\beta$, а также точки с нулевой вертикальной скоростью все же были значительны.

3. Поэтому был взят различный коэффициент вязкости вдоль и поперек линий тока. Так как в рассматриваемой задаче скорости вдоль тангенциального направления

значительно превышают радиальные и вертикальные скорости, то сделанное предположение осуществлялось путем взятия одних аналогов числа Рейнольдса для расчета радиальной и вертикальной составляющих скоростей и других для расчета тангенциальной составляющей скорости. Сравнение расчетных результатов с экспериментом показало, что оптимальным является соотношение аналогов чисел Рейнольдса для тангенциальной и вертикальной компонент скоростей порядка 0,2. Сделанное предположение позволило незначительно улучшить результаты расчетов. Однако в полученных результатах минимум угла располагался у самой стены, тогда как на эксперименте он был расположен внутри области. Это несоответствие было связано с тем, что в качестве граничных условий на стенках использовалось условие полного прилипания, что не соответствует условию эксперимента.

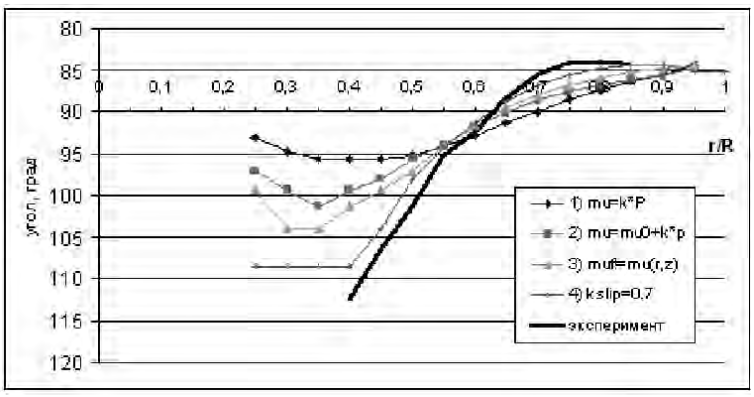



Рис. 3. График зависимости угла $\beta$ от расстояния до оси, взятый на высоте $0{,}15R$ над срезом чаши, построенный на основе расчетных данных различных вариантов модели, а также данных эксперимента.

С целью устранения этого недостатка в модель было добавлено граничное условие частичного проскальзывания на стенках (с определенным с помощью экспериментальных данных значением коэффициента проскальзывания $k_{\text{slip}} = 0{,}7$). При этом граничные условия для частичного проскальзывания были выведены аналогично способу, предлагаемому Роучем [3]. Как показало сравнение, такой способ задания граничных условий для данной задачи дает лучшее совпадение с экспериментом. При этом, вероятно из-за нелинейных эффектов, введение проскальзывания не только, как ожидалось, сместило минимум угла внутрь расчетной области, но значительно улучшило и сходимость с экспериментом других сравниваемых количественных параметров.

Итоговый график зависимости угла $\beta$ от расстояния до оси, взятый на высоте $0{,}15R$ над срезом чаши, построенный для сравнения результатов вышеописанных расчетов, представлен на рис. 3. На этом же рисунке представлен для сравнения аналогичный график, полученный из экспериментальных данных. Видно, что результаты расчетов по последней модели хорошо совпадают с данными экспериментов. На графиках расчетов виден также изгиб кривых при приближении к оси, обусловленный наличием вращающегося держателя. Из-за недостоверности экспериментальных данных в этой области проверить эти расчетные результаты не удалось.

Относительные ошибки в величине и положении минимального значения угла $\beta$ и точки, в которой менялся знак вертикальной составляющей скорости, рассчитанные

для разных вариантов модели, приведены в таблице 1.

Табл. 1. Проценты ошибок по сравниваемым параметрам для разных моделей.

| Варианты модели | ошибка по минимуму угла $\beta$, % | ошибка по расположению минимума, % | ошибка по расположению точки нулевой вертикальной скорости, % |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,4 | 18,8 | 11,1 |
| 2 | 1 | 18,8 | 3,2 |
| 3 | 0,4 | 18,8 | 1,6 |
| 4 | 0,4 | 9,3 | 0,8 |

Усовершенствование модели быстрого движения сыпучего материала привело к существенному улучшению совпадения расчетных данных с экспериментами для рассмотренной задачи, что позволяет предположить, что последний вариант модели окажется более эффективным и для других задач движения сыпучих материалов. В дальнейшем необходимо обоснование сделанных предположений и выявление границ их применения.

# Список литературы


[1] *В.Н. Хетагуров, Е.С. Каменецкий, С.Р. Тедеева, Б.М. Наниева.* Сравнение результатов расчетов движения сыпучей среды в цилиндрическом сосуде с вращающимся дном, выполненных с использованием двух математических моделей // Тр. Международного Форума по проблемам науки, техники и образования. Т. 2. М.: Академия наук о Земле. 2001.

[2] *А.В. Шваб, Е.В. Зайцева.* Численный метод расчета аэродинамики и массопереноса гранулированной среды // XVI Международная школа-семинар по численным методам механики вязкой жидкости. (http://www.ict.nsc.ru/comp_tech/tesises/mech/shvab.html)

[3] *П. Роуч.* Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.


## ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ*


**Д.Н. Никольский**

Орловский госуниверситет, E-mail: nikolskydn@mail.ru



Приводится параллельный алгоритм для решения двумерных задач эволюции границы раздела различных жидкостей.


### Постановка задачи

Задача об эволюции границы $\Gamma_t$ раздела жидкостей с различными вязкостями $\mu_1$ и $\mu_2$ в неоднородном слое проводимости $P(M) = K(M)H(M)$ (где $K(M)$ — проница-


*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

емость, $H(M)$ — толщина) сводится к решению системы интегрального и дифференциального уравнений [1, 2]:

$$g(M,t) - 2\lambda \int\limits_{\Gamma_t} g(N,t)\Omega(M,N)dl_N = 2\lambda\varphi_0(M,t), \quad M \in \Gamma_t, \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M,t) + \int\limits_{\Gamma_t} \frac{\partial g(N,t)}{\partial l_N}\vec{V}_2(M,N)dl_N, \quad M \in \Gamma_t, \tag{2}$$

$$\Omega(M,N) = P(N)\frac{\partial \Phi_1(M,N)}{\partial n_N}, \quad \lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1},$$

$$\vec{v}_0(M,t) = K(M)\nabla\varphi_0(M,t),$$

$$\vec{V}_2(M,N) = \frac{1}{H(M)}\left(\frac{\partial \Psi_2(M,N)}{\partial y_N}\vec{i} - \frac{\partial \Psi_2(M,N)}{\partial x_N}\vec{j}\right),$$

$$M = (x_M, y_M), \quad N = (x_N, y_N),$$

с заданным начальным условием при $t = 0$:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_M(\zeta, 0) = \vec{r}_{0M}(\zeta), \tag{3}$$

Здесь $\Phi_1(M,N)$ — квазипотенциал скорости нормированного стока, с полным расходом равным $-1$; $\Psi_2(M,N)$ — функция тока нормированного вихря с интенсивностью, приходящуюся на единицу проводимости слоя, равной $-1$; $\varphi_0(M,t)$ — квазипотенциал невозмущенного течения, моделирующий работу нагнетательных и эксплуатационных скважин в отсутствии границы $\Gamma_t$.

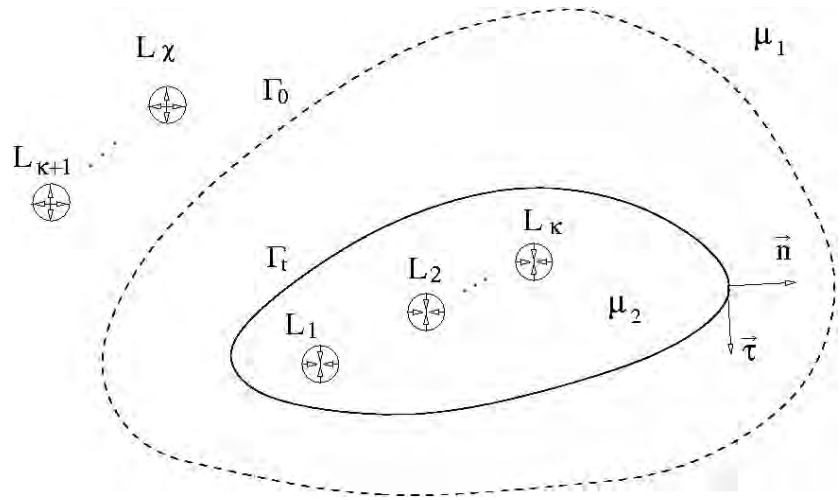



Рис. 1. Постановка задачи.

## Дискретная схема

Применим к системе уравнений (1) и (2) метод дискретных особенностей [3]. Для этого границу $\Gamma_t$ в каждый момент времени $t^j$, $j = 0, 1, \ldots$, представим системой точек

$(x_m^j, y_m^j)$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Интегралы в (1) и (2) заменим на суммы по формуле прямоугольников, а дифференциал в (2) — разностным аналогом:

$$g_m^j - 2\lambda \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} g_k^j \Omega(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) \Delta l_k = 2\lambda \varphi_0^j(x_m^j, y_m^j, t^j), \tag{4}$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1, \ldots,$$

$$\vec{r}_m^{j+1} = \vec{r}_m^j + \vec{v}_0(x_m^j, y_m^j, t^j)\Delta t + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} \vec{V}_2(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) \Delta g_k^j \Delta t, \tag{5}$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1, \ldots.$$

Систему линейных алгебраических уравнений (4) решим методом простой итерации [4]. В этом методе каждое новое приближение находится по следующей формуле:

$$g_m^{j\,p} = 2\lambda \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} g_k^{j\,p-1} \Omega(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) \Delta l_k + 2\lambda \varphi_0^j(x_m^j, y_m^j, t^j), \tag{6}$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad p = 1, 2, ..., J,$$

или в матричном виде

$$g^{j\,p} = B^j g^{j\,p-1} + c^j, \quad j = 0, 1, \ldots, \quad p = 1, 2, ..., J. \tag{7}$$

Здесь $J$ — число итераций, которое определяется из условия

$$\frac{\|x^J - x^{J-1}\|_1}{\|x^J\|_1} < \frac{1 - \|B\|_1}{\|B\|_1} \varepsilon \tag{8}$$

В качестве начального приближения выберем свободные члены $g_m^{j\,0} = c_m^j$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$.

На каждом шаге по времени $t^j$, $j = 0, 1, \ldots$ будем переразбивать границу $\Gamma_t$ на равные по длине дуги части. При этом каждому отрезку
$[(x_m, y_m), (x_{m-1}, y_{m-1})]$, $m = 1, 2, \ldots, n-1$ сопоставим линейный сплайн:

$$y(x) = \frac{y_{n-1}^j - y_0^j}{x_{n-1}^j - x_0^j} \left(x - x_0^j\right) + y_0^j,$$

$$y(x) = \frac{y_m^j - y_{m-1}^j}{x_m^j - x_{m-1}^j} \left(x - x_{m-1}^j\right) + y_{m-1}^j, \tag{9}$$

$$m = 1, 2, \ldots, n-1.$$

## Параллельный алгоритм

В ходе решения поставленной задачи выделим следующие этапы:

1. **Заполнение матрицы** — заполнение матрицы $B$ из (7).

2. **Решение СЛАУ** — выполнение итераций по формуле (7) до тех пор, пока не выполнится условие (8).

3. **Перемещение** $\Gamma_t$ — вычисление нового положения границы $\Gamma_t$ по формуле (5).

4. **Переразбиение** $\Gamma_t$ — моделирование границы $\Gamma_t$ сплайнами (9) и ее переразбиение на отрезки одинаковой длины.

Приведем параллельные алгоритмы, реализующие каждый из указанных этапов. Для этого введем обозначения для коллективных операций:

- `<Вектора>`→`<Вектор>` — производит сборку векторов `<Вектора>`, посылаемых всеми процессорами, в единый вектор `<Вектор>`, определенный на каждом процессоре.

- `<Переменные>`$\xrightarrow{\max}$`<Переменная>` — среди всех значений переменных `<Переменные>`, расположенных на всех процессорах, находит максимальное значение и рассылает его по всем процессорам в переменную `<Переменная>`.

- `<Переменные>`$\xrightarrow{\vee}$`<Переменная>` — выполняет операцию логического `ИЛИ`, аргументами которой являются переменные `<Переменные>`, определенные на всех процессорах. Результат операции помещается в переменную `<Переменная>`, определенную на каждом процессоре.

Пусть имеется $p$ процессоров. Индекс $i \in [0 \dots p-1]$ указывает на номер процессора. Считаем, что число точек разбиения границы $\Gamma_t$ $n$ кратно числу процессоров $p$, то есть $pn_p = n$.

### Заполнение матрицы

**Шаг 1.** Вычисляем вспомогательные массивы $\Delta x^j$ и $\Delta y^j$, содержащие значения центральных разностей координат узлов.

$$\Delta x^j_{m\,i} = 0{,}5\left(x^j_{(in_p+m+1)\%n} - x^j_{(in_p+m+n-1)\%n}\right),$$
$$\Delta y^j_{m\,i} = 0{,}5\left(y^j_{(in_p+m+1)\%n} - y^j_{(in_p+m+n-1)\%n}\right),$$
$$m = 0, 1, \dots, n_p - 1, \qquad i = 0, 1, \dots, p.$$

Знак «%» обозначает операцию получения остатка от целочисленного деления.

**Шаг 2.** Собираем центральные разности координат узлов в единый массив на всех процессорах.

$$(\Delta x^j_{i\,m}, \Delta^j_{i\,m}, m = 0, 1, \dots, n_p - 1) \longrightarrow (\Delta x^j_m, \Delta^j_m, m = 0, 1, \dots, n-1).$$

Для $i = 0, 1, \dots, p$.

**Шаг 3.** Вычисляем элементы матрицы $B$ и вектора $c$ из (7).

$$b^j_{m,k} = 2\lambda \left( -\frac{\partial \Phi_1(x^j_{in_p+m}, y^j_{in_p+m}, x^j_k, y^j_k)}{\partial x^j_k} \Delta y^j_k + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \Phi_1(x^j_{in_p+m}, y^j_{in_p+m}, x^j_k, y^j_k)}{\partial y^j_k} \Delta x^j_k \right),$$
$$m = 0, 1, \ldots, n_p - 1, \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$
$$c^j_m = 2\lambda \varphi_0(x^j_{in_p+m}, y^j_{in_p+m}, t^j), \quad m = 0, 1, \ldots, n_p - 1.$$

**Решение СЛАУ**

**Шаг 1.** В качестве нулевого приближения выбираем элементы вектора $c$ из (7) (столбец свободных членов).

$$r^j_{m\,i} = c^j_m, \quad m = 0, 1, \ldots, n_p - 1, \quad i = 0, 1, \ldots, p.$$

**Шаг 2.** Собираем нулевое приближение в единый вектор на всех процессорах.

$$(r^j_{m\,i}, m = 0, 1, \ldots, n_p - 1) \to (g^j_{0m}, m = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Для $i = 0, 1, \ldots, p$.

**Шаг 3.** Находим максимальное значение из сумм модулей элементов строк частей матрицы $B$, хранящихся на каждом процессоре.

$$\|B^j_i\|_1 = \max_{0 \leqslant m < n_p} \Big\{ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq in_p+m}}^{n-1} |b^j_{mk}|, \Big\}.$$

**Шаг 3.** Находим норму оператора $\|B^j\|_1$.

$$\|B^j_i\|_1 \xrightarrow{\max} \|B^j\|_1$$

Для $i = 0, 1, \ldots, p-1$. Если $\|B^j\|_1 \geq 1$ сгенерировать исключение.

**Шаг 4.** Вычисляем следующее приближение.

$$r^j_{m\,i} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq in_p+m}}^{n-1} b^j_{m\,k} g^j_{0k} + c^j_m, \quad m = 0, 1, \ldots, n_p - 1.$$

**Шаг 5.** Собираем решение на всех процессорах в единый вектор.

$$(r^j_{m\,i}, m = 0, 1, \ldots, n_p - 1) \to (g^j_m, m = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Для $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

**Шаг 6.** Проверяем выполнение условия достижения заданной точности. Если имеет место условие

$$\frac{|g^j_m - g^j_{0m}|}{\|g\|_1} > \frac{1 - \|B\|_1}{\|B\|_1} \varepsilon, \quad m = 0, 1, \ldots, n_p - 1$$

то переменной $action_i = 1$.

**Шаг 7.** Выполняем коллективную операцию $\vee$.

$$action_i \xrightarrow{\vee} action$$

Если заданная точность не достигнута, то выполняем присвоение

$$g_{0m} = g_m, \qquad m = 0, 1, \ldots, n-1,$$

и переходим к шагу 2.

**Перемещение** $\Gamma_t$

**Шаг 1.** Вычисляем центральные разности для плотности возмущения $g$.

$$\Delta g^j_{m\,i} = \frac{g^j_{(in_p+m+1)\%n} - g^j_{(in_p+m+n-1)\%n}}{2}, \qquad m = 0, 1, \ldots, n_p - 1.$$

**Шаг 2.** Собираем центральные разности в единый вектор на всех процессорах.

$$(g^j_{i\,m}, m = 0, 1, \ldots, n_p - 1) \to (g^j_m, m = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Для $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

**Шаг 3.** Вычисляем смещение границы $\Gamma_t$.

$$\vec{r}^{\,j+1}_{m\,i} = \vec{r}^{\,j}_m + \vec{v}_0(x^j_{in_p+m}, y^j_{in_p+m}, t^j)\Delta t +$$
$$+ \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq in_p+m}}^{n-1} \left( \frac{\partial \Psi_2(x^j_{in_p+m}, y^j_{in_p+m}, x^j_k, y^j_k)}{\partial y^j_{in_p+m}} \vec{i} - \right.$$
$$\left. \frac{\partial \Psi_2(x^j_{in_p+m}, y^j_{in_p+m}, x^j_k, y^j_k)}{\partial x^j_{in_p+m}} \vec{j} \right) \Delta g^j_k \, \Delta t,$$
$$m = 0, 1, \ldots, n_p - 1, \quad i = 0, 1, \ldots, p-1.$$

**Шаг 4.** Собираем радиус-векторы новых точек границы $\Gamma_t$ в единый вектор, доступный на всех процессорах.

$$(\Delta\vec{r}^{\,j+1}_{i\,m}, m = 0, 1, \ldots, n_p - 1) \to (\Delta\vec{r}^{\,j+1}_m, m = 0, 1, \ldots, n-1)$$

Для $i = 0, 1, \ldots, p-1$.

**Переразбиение** $\Gamma_t$

**Шаг 1.** Вычисляем вспомогательный массив, из элементов $\Delta L^j$.

$$\Delta L^j_0 = 0, \quad \Delta L^j_m = \sum_{k=1}^{n} \Delta l^j_k,$$
$$\Delta l^j_0 = \sqrt{(x^j_0 - x^j_n)^2 + (y^j_0 - y^j_n)^2}, \quad \Delta l^j_k = \sqrt{(x^j_k - x^j_{k-1})^2 + (y^j_k - y^j_{k-1})^2},$$

**Шаг 2.** Вычисляем шаг.

$$dl^j = \frac{\Delta L_n^j}{n}$$

**Шаг 3.** Находим абсциссы новых точек границы $\Gamma_t$.

$$x_{m\,i}^j = \pm \frac{(in_p + m)dl^j - \Delta L_k}{\sqrt{1 + \dfrac{y_{(k+1)\%n}^j - y_k^j}{x_{(k+1)\%n}^j - x_k^j}}} + x_k^j,$$

для $\Delta L_k < (in_p + m)dl^j \le \Delta L_{k+1}$, $m = 0, 1, \ldots, n_p - 1$, $i = 0, 1, \ldots, p - 1$.

**Шаг 4.** Находим ординаты новых точек границы $\Gamma_t$.

$$y_{m\,i} = \frac{y_{(k+1)\%n}^j - y_k^j}{x_{(k+1)\%n}^j - x_k^j}(x_{i\,m}^j - x_k^j) + y_k^j, \qquad m = 0, 1, \ldots, n_p - 1.$$

Для $i = 0, 1, \ldots, p - 1$.

**Шаг 5.** Собираем вектор с новыми координатами границы $\Gamma_t$ на всех процессорах.

$$\big((x_{m\,i}^j, y_{m\,i}^j), m = 0, 1, \ldots, n_p - 1\big) \to \big((x_m^j, y_m^j), m = 0, 1, \ldots, n - 1\big)$$

Для $i = 0, 1, \ldots, p - 1$.

## Численный эксперимент

Рассмотрим случай, когда проводимость слоя равна $P = 1$. В этом случае фундаментальные решения $\Phi_1$ и $\Psi_2$ примут вид:

$$\Phi_1(M, N) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MN}}, \quad r_{MN} = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2},$$
$$\Psi_2(M, N) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MN}}, \quad r_{MN} = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2}.$$

Пусть течение возмущается единичной скважиной дебита $q$, расположенной в точке $(x_1, y_1)$. Ее потенциал:

$$\varphi_0(M, t) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{1}{r_{MM_1}}, \quad r_{MM_1} = \sqrt{(x_M - x_1)^2 + (y_M - y_1)^2}.$$

В качестве первоначальной границы раздела жидкостей различной вязкости $\Gamma_0$ выберем окружность радиуса $R$:

$$x_0 = R\cos(\theta), \quad y_0 = R\sin(\theta).$$

Скважину расположим в точке $x_1 = 0$, $y_1 = 0{,}5$.

Табл. 1. Зависимость времени расчета одного шага по времени от числа процессоров $p$ при $n = 400$.

| Число процессоров $p$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| Заполнение матрицы, сек. | 0,2630 | 0,1806 | 0,0991 | 0,0601 |
| Решение СЛАУ, сек. | 0,2515 | 0,2312 | 0,1251 | 0,0725 |
| Перемещение $\Gamma_t$, сек. | 0,2449 | 0,1654 | 0,0859 | 0,0452 |
| Переразбиение $\Gamma_t$, сек. | 0,0265 | 0,0423 | 0,0393 | 0,0428 |

Табл. 2. Зависимость времени расчета одного шага по времени от числа процессоров $p$ при $n = 800$.

| Число процессоров $p$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| Заполнение матрицы, сек. | 1,0337 | 0,7219 | 0,3695 | 0,1989 |
| Решение СЛАУ, сек. | 0,8337 | 0,7425 | 0,3855 | 0,4082 |
| Перемещение $\Gamma_t$, сек. | 0,9826 | 0,6606 | 0,3315 | 0,1677 |
| Переразбиение $\Gamma_t$, сек. | 0,0928 | 0,1072 | 0,0691 | 0,0529 |

Табл. 3. Зависимость времени расчета одного шага по времени от числа процессоров $p$ при $n = 1600$.

| Число процессоров $p$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| Заполнение матрицы, сек. | 4,1429 | 2,9064 | 1,4559 | 0,7585 |
| Решение СЛАУ, сек. | 3,3254 | 2,9434 | 1,4971 | 0,7644 |
| Перемещение $\Gamma_t$, сек. | 3,9417 | 2,6367 | 1,4048 | 0,6692 |
| Переразбиение $\Gamma_t$, сек. | 0,3537 | 0,3646 | 0,1918 | 0,1034 |

Табл. 4. Зависимость времени расчета одного шага по времени от числа процессоров $p$ при $n = 3200$.

| Число процессоров $p$ | 1 | 2 | 4 | 8 |
|---|---|---|---|---|
| Заполнение матрицы, сек. | 16,5726 | 11,9565 | 7,2595 | 3,0266 |
| Решение СЛАУ, сек. | 13,3334 | 13,4510 | 6,2095 | 3,0095 |
| Перемещение $\Gamma_t$, сек. | 15,7474 | 10,5985 | 5,3446 | 2,6944 |
| Переразбиение $\Gamma_t$, сек. | 1,3950 | 1,3909 | 0,6652 | 0,3043 |

В таблицах 1–4 представлены зависимости времени расчета каждого этапа из п.3 при выполнении одного шага по времени $t$ от числа процессоров $p$, для числа точек разбиения $\Gamma_t$ $n = 400,\ 800,\ 1600$ и 3200. В случае одного процессора ($p = 1$) время расчета получено с использованием последовательного алгоритма (без пересылок между процессорами).

Видим, что расспараллеливание эффективно уже в случае 2-х процессоров для этапов «Заполнение матрицы», «Решение СЛАУ» и «Перемещение $\Gamma_t$». Для этапа «Переразбиение $\Gamma_t$» выигрыш во времени появляется при использовании 4-х процессоров при $n > 400$. Кроме того, малость времени выполнения этапа «Переразбиение $\Gamma_t$» по сравнению с другими этапами позволяет не использовать для него параллельные алгоритмы.

# Список литературы


[1] *Д.Н. Никольский.* Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математичеких наук. Орел, 2001. 191 с.

[2] *Д.Н. Никольский.* Численное моделирование и разработка программного обеспечения задач эволюции границы раздела жидкостей в курсе Математическое моделирование в физике. Учебно-методическое пособие для студентов и аспирантов. Орел: ГОУ ВПО Орловский государственный университет, 2006. 44 с.

[3] *И.К. Лифанов.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. Москва: «ТОО Янус», 1995. 520 с.

[4] *В.С. Рябенький.* Введение в вычислительную математику. Москва: «Физматлит», 2000. 296 с.

# СОПОСТАВЛЕНИЕ МЕТОДОВ НАНЕСЕНИЯ ПОТЕНЦИАЛОВ ДВОЙНОГО И ВИХРЕВОГО СЛОЕВ ПРИ РЕШЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ*

**Д.Н. Никольский†, Т.А. Никольская‡, Ю.С. Федяев†**

†Орловский государственный университет,

‡Орловский государственный технический университет

Производится сопоставление двух методов решения эволюционных задач: метода нанесения на подвижную границу потенциала двойного слоя и метода нанесения вихревого слоя. Сопоставление производится на примере осесимметричной задачи.

## Постановка задачи

Исследуем осесимметричную фильтрацию несжимаемой жидкости плотности $\rho$ и вязкости $\mu$ в однородной среде проницаемости $K$ под действием потенциальной массовой силы $\vec{F}$. Выберем в меридиональной полуплоскости декартовы оси координат $Ox$ и $Oy$. Полагаем, что $Ox$ является осью симметрии и координата $y \geqslant 0$. Давление $p$ и скорость фильтрации $\vec{v}$ в области течения $D$ удовлетворяют обобщенному закону Дарси и уравнению неразрывности [1]:

$$\vec{v}(M,t) = -\frac{K}{\mu}\nabla(p(M,t) + \rho\Pi(M,t))\,, \quad M \in D\,, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(yv_x(M,t)\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(yv_y(M,t)\right) = 0\,, \quad M \in D\,. \tag{2}$$

Здесь $M = (x,y)$ — точка области фильтрации $D$, $t$ — время, $\nabla$ — двумерный оператор Гамильтона, $\Pi$ — потенциал массовой силы $\vec{F}$, приходящейся на единицу массы жидкости.

Отметим, что уравнения (1) и (2) также имеют место при исследовании фильтрации в тонком слое, толщина которого $H = y$ [6].

Физическая скорость и скорость фильтрации взаимосвязаны равенством

$$\sigma\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}(M,t)\,, \quad M \in D\,, \tag{3}$$

где $\sigma$ — пористость грунта, $\vec{r}_M = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$ — радиус-вектор точки $M$ ($\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ — орты координатных осей $Ox$ и $Oy$).

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

Выберем характерные величины: длину $L_0$, время $T_0$, скорость $V_0$, давление $P_0$, плотность $\rho_0$ и вязкость $\mu_0$ жидкости, коэффициент проницаемости среды $K_0$, потенциал $\Pi_0$. Полагаем, что между ними выполняются соотношения:

$$P_0 = \rho_0 \Pi_0 \,, \quad \frac{K_0 \rho_0 \Pi_0}{\mu_0 L_0 V_0} = 1 \,, \quad \frac{\sigma L_0}{T_0 V_0} = 1 \,.$$

Тогда в безразмерных величинах $\vec{r}\,'_M = \vec{r}_M / L_0$, $t' = t/T_0$, $\vec{v}\,' = \vec{v}/V_0$, $p' = p/P_0$, $\rho' = \rho/\rho_0$, $K' = K/K_0$, $\Pi' = \Pi/\Pi_0$, $\nabla' = L_0 \nabla$ закон Дарси (1) и уравнение (3) примут вид (штрихи над величинами опущены):

$$\vec{v}(M,t) = \frac{K}{\mu} \nabla \varphi(M,t) \,, \quad M \in D \,, \tag{4}$$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}(M,t) \,, \quad M \in D \,, \tag{5}$$

а уравнение (2) сохраняет свою форму. Функцию $\varphi = -p - \rho\Pi$ называют потенциалом скорости, т.к. при фильтрации в однородном грунте жидкости постоянной вязкости поле скорости потенциально и можно записать

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_y(M,t)}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x(M,t)}{\partial y}\right) = 0 \,, \quad M \in D \,. \tag{6}$$

Подставляя (4) в (2) получаем уравнение для потенциала

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(y \frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y \frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial y}\right) = 0 \,, \quad M \in D \,. \tag{7}$$

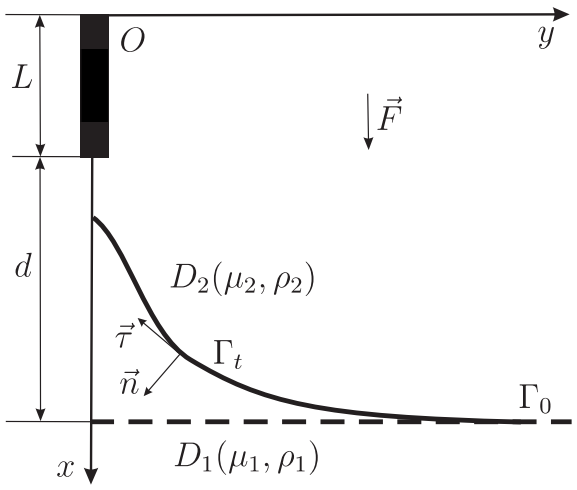



Рис. 1. Область фильтрации.

Полагаем, что течение жидкости вызвано работой вертикальной эксплуатационной скважины дебита $q$ с фильтром длины $L$ (см. рис. 1). В области фильтрации $D$ имеется подвижная граница $\Gamma_t$, которая её делит на области $D_1$ и $D_2$. Область $D_1$ занята жидкостью плотности $\rho_1$ и вязкости $\mu_1$, а область $D_2$ — жидкостью плотности $\rho_2$ и вязкости $\mu_2$. При фильтрации одна жидкость полностью замещает другую («поршневое» вытеснение). В начальный момент времени граница раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей представляет собой горизонтальную прямую,

которая расположена на расстоянии $d$ от фильтра скважины. Поле силы тяжести однородно и потенциал массовой силы $\Pi = -\vec{g} \cdot \vec{r}_M + \text{const}$ ($\vec{g}$ — ускорение свободного падения).

В рассматриваемом случае потенциал невозмущённого течения в отсутствии границы $\Gamma_t$ имеет вид [5]:

$$\varphi_0(M,t) = \frac{q}{2\pi} \ln \frac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{x - L + \sqrt{(x-L)^2+y^2}}\,, \quad M \in D\,. \tag{8}$$

Невозмущённое поле скоростей определяется по формуле

$$\vec{v}_0(M,t) = \nabla \varphi_0(M,t)\,, \quad M \in D\,. \tag{9}$$

На границе $\Gamma_t$ выполняются условия непрерывности давления и расхода жидкости (действием капиллярных сил пренебрегаем). Эти условия для потенциала имеют вид [7]:

$$\begin{gathered} \varphi^+(M,t) - \varphi^-(M,t) = (\rho_2 - \rho_1)\Pi(M,t)\,, \\ \frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial n_M}\right)^+ = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial \varphi(M,t)}{\partial n_M}\right)^-\,, \quad M \in \Gamma_t\,. \end{gathered} \tag{10}$$

Здесь и далее «+» и «−» обозначают предельные значения функций при подходе к границе $\Gamma_t$ со стороны нормали $\vec{n}$. Орт нормали $\vec{n}$ направлен внутрь области $D_1$ и образует с ортом касательной $\vec{\tau}$ правую двойку.

Для скорости фильтрации граничные условия (10) примут вид [8]:

$$\begin{gathered} \mu_1 v_\tau^+(M,t) - \mu_2 v_\tau^-(M,t) = (\rho_2 - \rho_1) K \frac{\partial \Pi(M,t)}{\partial \tau_M}\,, \\ v_n^+(M,t) = v_n^-(M,t)\,, \qquad M \in \Gamma_t\,. \end{gathered} \tag{11}$$

Так как область $D$ содержит бесконечно удалённую точку $M_\infty$ и в ней нет источников (стоков) течения, то скорость

$$v(M,t) \to 0 \quad \text{при} \quad M \to M_\infty\,. \tag{12}$$

Положение границы $\Gamma_t$ в начальный момент времени известно и задаётся параметрическим уравнением ($\zeta$ — параметр):

$$\text{при} \quad t = 0 \quad \vec{r}_{0M} = (L+d)\vec{\imath} + \zeta \vec{\jmath}, \quad \zeta \in [0,\infty)\,, \quad M \in \Gamma_0\,. \tag{13}$$

В последующие моменты $t > 0$ положение границы $\Gamma_t$ определяется согласно (5) уравнением

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \frac{\vec{v}^+(M,t) + \vec{v}^-(M,t)}{2}\,, \quad M \in \Gamma_t\,. \tag{14}$$

Таким образом, задача эволюции границы $\Gamma_t$ состоит в том, что по заданным источникам (стокам) течения (8) и её начальному положению (13) необходимо найти положение этой границы в моменты времени $t > 0$. Для этого можно решать уравнение (7) с граничными условиями (10). Используя найденный потенциал течения по

формуле (4) получаем поле скоростей жидкости, которое должно удовлетворять условию (12). Далее решая дифференциальное уравнение (14) с начальным условием (13) находим эволюцию границы $\Gamma_t$. Другой подход состоит в непосредственном отыскании поля скоростей, удовлетворяющего уравнениям (2), (6), условиям (11), (12) и последующем решении уравнения (14) с начальным условием (13). Рассмотрим этот вопрос более детально.

**Решение с использованием потенциала двойного слоя**

Поставленная задача об эволюции границы $\Gamma_t$ раздела жидкостей с различными вязкостями $\mu_1$ и $\mu_2$, и плотностями $\rho_1$ и $\rho_2$ сводится к решению системы интегрального и дифференциального уравнений [4]:

$$g(M,t) - 2\lambda \int\limits_{\Gamma_t} g(N,t)\Omega(M,N)\, dl_N = 2\lambda\varphi_0(M,t) + \alpha x_M\,, \quad M \in \Gamma_t\,, \tag{15}$$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M,t) + \vec{v}_*(M,t)\,, \qquad M \in \Gamma_t, \tag{16}$$

с заданным начальным условием (13). Здесь обозначено

$$\lambda = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}\,, \quad \alpha = \frac{2(\rho_1 - \rho_2)}{\mu_1 + \mu_2}\,, \tag{17}$$

$$M = (x_M, y_M)\,, \quad N = (x_N, y_N)\,,$$

$$\Omega(M,N) = y_N \frac{\partial \Phi_1(M,N)}{\partial n_N}\,, \quad \vec{v}_*(M,t) = \int\limits_{\Gamma_t} \frac{\partial g(N,t)}{\partial l_N} \vec{V}_{\text{в}}(M,N)\, dl_N\,,$$

$$\vec{V}_{\text{в}}(M,N) = \frac{1}{y_M}\left(\frac{\partial \Psi_2(M,N)}{\partial y_M}\vec{\imath} - \frac{\partial \Psi_2(M,N)}{\partial x_M}\vec{\jmath}\right), \tag{18}$$

Функция

$$\Phi_1(M,N) = \frac{1}{2\pi\sqrt{y_M y_N}} \int\limits_0^\pi \frac{d\varphi}{\sqrt{2\omega - 2\cos\varphi}}$$

это квазипотенциал скорости нормированного стока, с полным расходом равным $-1$, а

$$\Psi_2(M,N) = -\frac{\sqrt{y_M y_N}}{2\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{2\omega - 2\cos\varphi}}$$

это функция тока нормированного вихря с интенсивностью, равной $-1$,

$$\omega = \frac{(x_M - x_N)^2 + y_M^2 + y_N^2}{2y_M y_N}\,.$$

Применим к системе уравнений (15) и (16) метод дискретных особенностей [2]. Для этого границу $\Gamma_t$ в каждый момент времени $t^j$, $j = 0, 1, \ldots$, представим системой точек

$(x_m^j, y_m^j)$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$. Интегралы в (15) и (16) заменим на суммы по формуле прямоугольников, а дифференциал в (16) — разностным аналогом:

$$g_m^j - 2\lambda \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} g_k^j \Omega(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) \Delta l_k = 2\lambda \varphi_0^j(x_m^j, y_m^j, t^j) + \alpha x_m^j \,, \tag{19}$$

$$\Omega(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) = \left( -\frac{\partial \Phi_1(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j)}{\partial x_k^j} \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)_k^j + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \Phi_1(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j)}{\partial y_k^j} \left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)_k^j \right) \Big/ \sqrt{\left( \frac{\partial x}{\partial l} \right)_k^{j\,2} + \left( \frac{\partial y}{\partial l} \right)_k^{j\,2}}$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1 \,, \quad j = 0, 1, \ldots \,,$$

$$\vec{r}_m^{\,j+1} = \vec{r}_m^{\,j} + \vec{v}_0(x_m^j, y_m^j, t^j) \Delta t + \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq m}}^{n-1} \vec{V}_{\text{в}}(x_m^j, y_m^j, x_k^j, y_k^j) \left( \frac{\partial g}{\partial l} \right)_k^j \Delta l_k^j \Delta t \,, \tag{20}$$

$$m = 0, 1, \ldots, n-1 \,, \quad j = 0, 1, \ldots \,.$$

В (19) и (20) первая производная вычисляется с учётом неравномерности разбиения границы $\Gamma_t$ [9]:

$$\left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_0 = \frac{f_1 - f_0}{h_1} \,,$$

$$\left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_m = \frac{h_{m+1}}{h_m + h_{m+1}} \frac{f_m - f_{m-1}}{h_m} + \frac{h_m}{h_m + h_{m+1}} \frac{f_{m+1} - f_m}{h_{m+1}} \,, \tag{21}$$

$$m = 1, 2, \ldots, n-2 \,,$$

$$\left( \frac{\partial f(x)}{\partial x} \right)_{n-1} = \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-1}} \,,$$

$$h_m = \sqrt{(x_m - x_{m-1})^2 + (y_m - y_{m-1})^2} \,, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1 \,.$$

К системе линейных алгебраических уравнений (19) применим метод простой итерации.

При численном расчёте первоначальная граница раздела жидкостей $\Gamma_0$ моделировалась отрезком $x = L + d$, $y \in (0, 10]$. Последнее привело к необходимости наложения ограничения на скорость возмущения:

$$\vec{v}_* = \vec{v}_{\min} \quad \text{для} \quad y \in [y_{\min}, 10] \,. \tag{22}$$

Здесь $y_{\min}$ — ордината точки, в которой модуль скорости возмущения $v_{\min} = v/1000$, $v$ — модуль скорости возмущения напротив скважины.

### Решение с использованием вихревого слоя

В постановке для поля скоростей задача о эволюции границы раздела жидкостей с различными вязкостями и плотностями сводится к решению системы интегрального

и дифференциального уравнений следующего вида: [8]:

$$f(M,t) - 2\lambda \int\limits_{\Gamma_t} f(N,t)\vec{v}_{\text{в}}(M,N)\cdot\vec{\tau}_M\, d\ell_N = \\ = [2\lambda\vec{v}_0(M,t) - \alpha K\nabla_M\Pi(M,t)]\cdot\vec{\tau}_M\,, \quad M\in\Gamma_t\,, \quad (23)$$

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M,t) + \int\limits_{\Gamma_t} f(N,t)\vec{v}_{\text{в}}(M,N)\, d\ell_N\,, \quad M\in\Gamma_t\,. \quad (24)$$

Здесь параметры $\lambda$ и $\alpha$ определяются по формулам (17), $f(M,t)$ — плотность вихревого слоя, функция $\vec{v}_{\text{в}}(M,N) = \vec{V}_{\text{в}}(M,N)/K(N)$, $\vec{V}_{\text{в}}(M,N)$ — скорость нормированного вихря, которая определяется по формуле (18).

Решение задачи можно упростить, когда необходимо найти только положение границы $\Gamma_t$ в любой момент времени. Из уравнений (23), (24) находим

$$f(N,t) = \left[2\lambda\frac{d\vec{r}_N}{dt} - \alpha K\nabla_N\Pi(N,t)\right]\cdot\vec{\tau}_N\,, \quad N\in\Gamma_t\,. \quad (25)$$

Тогда (24) при учёте (25) примет вид интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{d\vec{r}_M}{dt} = \vec{v}_0(M,t) + \int\limits_{\Gamma_t}\left[2\lambda\frac{d\vec{r}_N}{dt} - \alpha K\nabla_N\Pi(N,t)\right]\cdot\vec{\tau}_N\vec{v}_{\text{в}}(M,N)\, d\ell_N\,, \quad M\in\Gamma_t\,. \quad (26)$$

Таким образом, исследование задачи сводится к решению интегро-дифференциального уравнения (26) при начальном условии (13).

Полученные уравнения решались численно на основе метода дискретных особенностей [2]. Полагаем, что граница $\Gamma_t$ в каждый момент времени $t_p$, $p = 0,1,\ldots$, задаётся множеством точек $E^p_{\Gamma_t} = \{(x^p_i, y^p_i),\ i = 1,2,\ldots,n\}$. Тогда начальное условие (13) примет вид

$$\text{при} \quad t = 0 \quad \Gamma_0 : \{(x^0_i, y^0_i),\ i = 1,2,\ldots,n)\}\,. \quad (27)$$

Учитывая, что $\vec{\tau}_M = \dfrac{\partial x_M}{\partial\ell_M}\vec{\imath} + \dfrac{\partial y_M}{\partial\ell_M}\vec{\jmath}$, $\Pi = -\vec{r}_M + \text{const}$ запишем конечно-разностный аналог уравнений (23), (24). Заменив производные по времени правыми разностями, производные по координатам центральными разностями, а интегралы по формуле прямоугольников поучим:

$$f^p_i - 2\lambda\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f^p_j\vec{v}_{\text{в}_{ij}}\cdot\vec{\tau}_i\Delta\ell_j = 2\lambda\vec{v}^p_{0i}\cdot\vec{\tau}_i + \alpha K\tau_{x_i}\,, \quad (28)$$

$$\vec{r}^{\,p+1}_i = \vec{r}^{\,p}_i + \vec{v}^p_{0i}\Delta t_{p+1} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} f^p_j\vec{v}_{\text{в}_{ij}}\Delta\ell_j\Delta t_{p+1} \quad (29)$$

Здесь $i = 1,2,\ldots,n$, $p = 0,1,\ldots$, $\Delta t_{p+1} = t_{p+1} - t_p$, $f^p_i = f(x^p_i, y^p_i)$, $\vec{v}_{\text{в}_{ij}} = \vec{v}_{\text{в}}(x^p_i, y^p_i, x^p_j, y^p_j)$, $\vec{v}^p_{0i} = \vec{v}_0(x^p_i, y^p_i, t_p)$, $\vec{r}^{\,p}_i = x^p_i\vec{\imath} + y^p_i\vec{\jmath}$,

$$\Delta\ell_j = \sqrt{(x^p_j - x^p_{j-1})^2 + (y^p_j - y^p_{j-1})^2}\,, \quad j = 2,3,\ldots,n\,, \quad \Delta\ell_1 = \Delta\ell_2\,,$$

$$\vec{\tau}_i = \frac{\Delta\ell_{i+1}}{\Delta\ell_i + \Delta\ell_{i+1}} \frac{\vec{r}_i^{\,p} - \vec{r}_{i-1}^{\,p}}{\Delta\ell_i} + \frac{\Delta\ell_i}{\Delta\ell_i + \Delta\ell_{i+1}} \frac{\vec{r}_{i+1}^{\,p} - \vec{r}_i^{\,p}}{\Delta\ell_{i+1}}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1,$$

$$\vec{\tau}_1 = \frac{\vec{r}_2^{\,p} - \vec{r}_1^{\,p}}{\Delta\ell_2}, \quad \vec{\tau}_n = \frac{\vec{r}_n^{\,p} - \vec{r}_{n-1}^{\,p}}{\Delta\ell_n}.$$

Отметим, что при вычислении касательной к границе $\Gamma_t$ используется формула аппроксимации производных центральными разностями на неравномерной сетке.

Решая систему уравнений (28), (29) при начальном условии (27), по заданному положению границы $\Gamma_0$ находим положение границы $\Gamma_t$ в моменты времени $t_p$, $p = 1, 2, \ldots$. Отметим, что уравнение (28) представляет собой систему $n$ линейных алгебраических уравнений, из которой находим плотность вихревого слоя $f_i^p$ при заданном положении границы $\Gamma_t$ в момент времени $t_p$. Подставив $f_i^p$ в $2n$ уравнений (29) получаем положение границы $\Gamma_t$ в момент времени $t_{p+1}$.

Интегро-дифференциальное уравнение (26) в конечно-разностном виде имеет вид

$$\frac{\vec{r}_i^{\,p+1} - \vec{r}_i^{\,p}}{\Delta t_{p+1}} = \vec{v}_{0i}^{\,p} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \left( 2\lambda \frac{\vec{r}_j^{\,p+1} - \vec{r}_j^{\,p}}{\Delta t_{p+1}} \cdot \vec{\tau}_j + \alpha K \tau_{x_j} \right) \vec{v}_{\text{в}ij} \Delta\ell_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{30}$$

Уравнение (30) представляет собой систему $2n$ линейных алгебраических уравнений. Решая (30) при начальном условии (27) находим положение границы $\Gamma_t$ в моменты времени $t_p$, $p = 1, 2, \ldots$.

Отметим, что решение системы уравнений (28), требует $n(n-1)$ вычислений функции $\vec{v}_{\text{в}}$ и $n$ вычислений функции $\vec{v}_0$ на каждом шаге по времени. При этом получается система $n$ линейных алгебраических уравнений. Найденные скорости $\vec{v}_{\text{в}}$ и $\vec{v}_0$ можно использовать при решении уравнений (29). Когда же решается система уравнений (30), то функции $\vec{v}_{\text{в}}$ и $\vec{v}_0$ также вычисляются $n(n-1)$ и $n$ раз соответственно. Но получается система $2n$ линейных алгебраических уравнений. Поэтому эволюцию границы $\Gamma_t$ предпочтительнее исследовать решая уравнения (28), (29) при начальном условии (27).

При численном расчете первоначальная граница раздела жидкостей $\Gamma_0$ моделировалась отрезком прямой $x = L + d$, $y \in (0, 10]$, на котором выбиралось равномерное (по его длине) разбиение. Использование вихревого слоя позволяет решать задачу без каких-либо ограничений на концах этого отрезка. Системы уравнений (28) и (30) решались метод Гаусса. Отметим, что система уравнений (28) допускает использование метода простой итерации.

**Сопоставление результатов**

В качестве характерного расстояния выберем $d$ (см. рис. 1). Полагаем длину фильтра $L = 0{,}5$. За характерное время примем время $T_0$, по истечении которого граница $\Gamma_t$ достигнет контура скважины при $\alpha = \lambda = 0$ [5]

$$T_0 = \frac{2\pi d^2 (3L + 2d)}{3Lq}. \tag{31}$$

Из формулы (31) следует, что при численных расчётах удобно выбрать $q = 14\pi/3$. Полагаем, что первая жидкость это вода, в вторая — нефть и выберем $\lambda = 0{,}5$ и

$\alpha = 0{,}1$ [3]. В этом случае время достижения границей $\Gamma_t$ скважины называют временем заводнения скважины.

В таблицах 1–4 приведены результаты проведённых расчётов. Здесь $T_1$ обозначено время заводнения, полученное при решении системы уравнений (15), (16), а $T_2$ — это время, полученное при решении системы уравнений (28), (29). Отметим, что при решении интегро-дифференциального уравнения (30) получается время заводнения, совпадающее с $T_2$. Параметры $\eta$ и $\eta_i$ определяется по формулам

$$\eta = \left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) \cdot 100\%\,, \quad \eta_i = \left(1 - \frac{T_i^{2n}}{T_i^n}\right) \cdot 100\%\,, \quad i = 1, 2\,,$$

где $T_i^n$ — время заводнения при разбиении границы на $n$ точек, а $T_i^{2n}$ — время заводнения при разбиении границы на $2n$ точек.

Табл. 1. Время заводнения скважины при шаге $\Delta t = 0{,}01$.

| $n$ | 40 | 80 | 160 | 320 |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | 0,76 | 0,72 | 0,69 | 0,66 |
| $\eta_1$, % | | 5,26 | 4,17 | 4,35 |
| $T_2$ | 0,72 | 0,68 | 0,65 | 0,64 |
| $\eta_2$, % | | 5,56 | 4,41 | 1,54 |
| $\eta$, % | 5,26 | 5,56 | 5,80 | 3,03 |

Табл. 2. Время заводнения скважины при шаге $\Delta t = 0{,}005$.

| $n$ | 40 | 80 | 160 | 320 |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | 0,750 | 0,710 | 0,675 | 0.650 |
| $\eta_1$, % | | 5,33 | 4,93 | 3,70 |
| $T_2$ | 0,710 | 0,670 | 0,645 | 0,625 |
| $\eta_2$, % | | 5,63 | 3,73 | 3,10 |
| $\eta$, % | 5,33 | 5,63 | 4,44 | 3,85 |

Табл. 3. Время заводнения скважины при шаге $\Delta t = 0{,}0025$.

| $n$ | 40 | 80 | 160 | 320 |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | 0,7425 | 0,7050 | 0,6725 | 0,6450 |
| $\eta_1$, % | | 5,05 | 4,61 | 4,09 |
| $T_2$ | 0,7050 | 0,6650 | 0,6375 | 0,6225 |
| $\eta_2$, % | | 5,67 | 4,14 | 2,35 |
| $\eta$, % | 5,05 | 5,67 | 5,20 | 3,49 |

Табл. 4. Время заводнения скважины при шаге $\Delta t = 0{,}00125$.

| $n$ | 40 | 80 | 160 | 320 |
|---|---|---|---|---|
| $T_1$ | 0,74000 | 0,70125 | 0,66875 | 0,64250 |
| $\eta_1$, % | | 5,24 | 4,63 | 3,93 |
| $T_2$ | 0,70250 | 0,66250 | 0,63500 | 0,61875 |
| $\eta_2$, % | | 5,69 | 4,15 | 2,56 |
| $\eta$, % | 5,07 | 5,53 | 5,05 | 3,70 |

Параметр $\eta_i$ характеризует практическую сходимость предложенных численных методов [2]. Видим , что практическая сходимость имеет место для всех предложенных методов, но при использовании вихревого слоя $\eta_i$ уменьшается быстрее. Параметр $\eta$ характеризует различие значений времени заводнения, полученного разными методами. Замечаем, что с ростом $n$ практически для всех значений $\Delta t$ параметр $\eta$ уменьшается и при $n = 320$ различие результатов составляет не более 4%.

# Список литературы


[1] *О.В. Голубева.* Курс механики сплошных сред. М.: Высшая школа, 1972. 368 с.

[2] *И.К. Лифанов.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. Москва «ТОО Янус», 1995. 520 с.

[3] *М. Маскет.* Физические основы технологии добычи нефти. Москва—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 606 с.

[4] *Д.Н. Никольский.* Математическое моделирование работы системы скважин в однородных и неоднородных слоях с подвижной границей раздела жидкостей различной вязкости. Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математичеких наук. Орёл, 2001. 191 с.

[5] *Д.Н. Никольский, Т.А. Никольская.* Решение осесимметричной задачи о поднятии конуса подошвенной воды к линейной скважине в бесконечном пласте// Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Вып. 3. Орёл. ОГУ, 2004. С. 38–42.

[6] *В.Ф. Пивень.* Функции комплексного переменного в динамических процессах. Орёл. Изд-во Орловского пединститута. 1994. 148 с.

[7] *В.Ф. Пивень.* Задача об эволюции границы раздела жидкостей различной плотности и вязкости в неоднородной среде// Труды Международных школ-семинаров «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики». Орёл. ОГУ, 2002. С. 69–74.

[8] *В.Ф. Пивень.* Двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородном слое при наличии массовой силы// Труды XI Международного симпозиума «Методы дискретных особенностей в задачах математической физики» (МДОЗМФ-2003). Харьков—Херсон, 2003. С. 203–208.

[9] *А.А. Самарский.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971. 552 с.

# РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА ТИПА ФРЕДГОЛЬМА ДЛЯ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ*

**В.Ф. Пивень**

ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»,

Россия, г. Орел, ул. Комсомольская, д. 95

Исследуется разрешимость неоднородных интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма, к которым сводится на основе потенциала двойного слоя исследование граничных задач фильтрации в неоднородной пористой среде.

**1**. Стационарную трехмерную фильтрацию в неоднородной пористой среде проницаемости $K(M)$ (тонком слое проводимости $P(M) = K(M)H(M)$—в двумерном случае, $K(M)$—проницаемость слоя, $H(M)$—его толщина) описываем квазипотенциалом $\varphi(M)$, который удовлетворяет всюду в области $\mathcal{D}$ течения, за исключением особых точек $\varphi(M)$, уравнению [1]

$$\nabla \cdot [A(M)\nabla\varphi(M)] = 0 \ , \quad M \in \mathcal{D} \ . \tag{1}$$

Здесь $\nabla$—оператор Гамильтона, $A(M) = K(M)$—в трехмерном и $A(M) = P(M)$—двумерном случаях.

Квазипотенциал течения $\varphi(M)$ в случае краевой задачи Дирихле (внутренней и внешней) и задаче сопряжения сред (слоев) различных проницаемостей (проводимостей) с границей $\Gamma$ представляем в виде потенциала двойного слоя, непрерывно распределенного с плотностью $g(N)$ на этой границе:

$$\varphi(M) = \int\limits_{\Gamma} A(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}g(N)d\sigma_N \ , \quad M \in \mathcal{D} \ . \tag{2}$$

Здесь $\Phi(M,N)$—фундаментальное решение уравнения (1) по координатам точки $M$.

Непрерывно продолжая квазипотенциал (2) на границу $\Gamma$, получаем его предельные значения [1]

$$\varphi^{\pm}(M) = \int\limits_{\Gamma} A(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}g(N)d\sigma_N \pm \frac{g(M)}{2} \ , \quad M \in \Gamma \ . \tag{3}$$

Здесь интеграл в случае поверхностей (кривых) класса Ляпунова существует в смысле его главного значения по Коши, знак «+» («-») соответствует предельным значениям $\varphi(M)$ при подходе со стороны (противоположной стороны) орта нормали $\vec{n}$ к границе $\Gamma$. Выбираем $\vec{n}$ в задаче Дирихле во внутрь области $\mathcal{D}$, а в задаче сопряжения—в область $\mathcal{D}_1$, занятую средой проницаемости $K_1$ (проводимости $P_1$), при этом среда проницаемости $K_2$ (проводимости $P_2$) занимает область $\mathcal{D}_2$ и $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}$.

Согласно заданным на $\Gamma$ условиям с учетом (3) имеем для $g(M)$ неоднородное интегральное уравнение второго рода

$$g(M) - \lambda \int\limits_{\Gamma} \mathcal{K}(M,N)g(N)d\sigma_N = F(M) \ , \quad M \in \Gamma \ . \tag{4}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

Здесь $\mathcal{K}(M,N)$—ядро уравнения

$$\mathcal{K}(M,N) = -2A(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} \ , \tag{5}$$

$F(M)$—функция, характеризующая заданные на $\Gamma$ давление и/или источники (стоки) течения; $\lambda$—параметр, принимающий численные значения в случае внутренней ($\lambda = -1$) и внешней ($\lambda = +1$) краевой задачи Дирихле и в случае задачи сопряжения $\lambda = -\lambda_k$ ($\lambda_k$ характеризует скачок проницаемости сред на $\Gamma$, $\lambda_k \in (-1,1)$).

Ядро (5) имеет слабую сингулярность, и поэтому уравнение (3) относится к уравнениям типа Фредгольма. Вследствие этого для разрешимости уравнения (4) (существования у него решения) применима теория Фредгольма.

**2**. Согласно теории Фредгольма пусть $g_0(M)$—решение вытекающего из (4) при $F(M) = 0$ однородного уравнения

$$g_0(M) - \lambda \int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M,N) g_0(N) d\sigma_N = 0 \ , \quad M \in \Gamma \ . \tag{6}$$

Уравнение (6) может иметь тривиальное решение $g_0(M) \equiv 0$. В этом случае согласно альтернативы Фредгольма уравнение (6) разрешимо при любой правой части $F(M)$.

Простейшим нетривиальным решением (собственной функцией) уравнения (6) является произвольная отличная от нуля константа $C : g_0(M) = C$. В этом случае уравнение (6) принимает вид

$$C\left[1 - \lambda \int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M,N) d\sigma_N\right] = 0 \ , \quad M \in \Gamma \ . \tag{7}$$

Здесь интеграл

$$\int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M,N) d\sigma_N = -2 \int\limits_\Gamma A(N) \frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} d\sigma_N = 1 \ , \quad M \in \Gamma \ , \tag{8}$$

так как интеграл

$$\int\limits_\Gamma A(N) \frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} d\sigma_N = -\frac{1}{2} \ , \quad M \in \Gamma$$

представляет собой поток через поверхность (линию) $\Gamma$ класса Ляпунова к стоку единичной мощности, расположенному в точке $M \in \Gamma$. Поэтому из (7) при учете (8) находим, что $\lambda = +1$ является характеристическим числом уравнения (6). Числу $\lambda = +1$ отвечает внешняя задача Дирихле и, следовательно согласно альтернативы Фредгольма уравнение (4) для этой задачи неразрешимо.

Из (6) при $\lambda \neq 0$ имеем

$$\left|\frac{g_0(M)}{\lambda}\right| = \left|\int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M,N) g_0(N) d\sigma_N\right| \leqslant B \left|\int\limits_\Gamma \mathcal{K}(M,N) d\sigma_N\right| \ , \quad M \in \Gamma$$

или, учитывая (8),

$$\left|\frac{g_0(M)}{\lambda}\right| \leqslant B \ , \quad M \in \Gamma \ ,$$

где $B = max|g_0(M)| > 0$. В точке $M_0 \in \Gamma$, где $|g_0(M_0)| = B$, записываем

$$\left|\frac{1}{\lambda}\right| B \leqslant B \ . \tag{9}$$

Причем равенство имеет место, когда собственная функция уравнения (6) константа: $g_0(M) = g_0(M_0) = B$.

Если $g_0(M) \neq 0$ и, следовательно, $B \neq 0$, то из (9) имеем $|\lambda^{-1}| \leqslant 1$, причем знак равенства только в случае собственной функции $g_0(M) = \text{const}$. Поскольку этой собственной функции отвечает, как показано выше, характеристическое число $\lambda = +1$, то получаем $-1 < \lambda^{-1} \leqslant 1$. Отсюда следует, что характеристические числа $\lambda$ располагаются на лучах

$$\lambda \geqslant 1 \text{ и } \lambda < -1 \ . \tag{10}$$

Поскольку интересующие нас числа $\lambda = -1$ и $\lambda = -\lambda_k$ ($\lambda_k \in (-1, 1)$) не являются характеристическими (их называют правильными), то уравнение (6) для них имеет только тривиальное решение $g_0(M) \equiv 0$ и, следовательно, уравнение (4) для этих чисел $\lambda$ разрешимо при любой правой части $F(M)$. Это означает, что имеют место решения в виде (2) внутренней краевой задачи Дирихле и задачи сопряжения, для которых $g(M)$ определяется из уравнения (4).

Отметим, что характеристические числа вида (10) указаны в [2] для интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма в случае краевых задач Дирихле и Неймана для уравнения Лапласа.

**3**. Как показано выше, решение внешней краевой задачи Дирихле в виде (2) не существует, так как соответствующее ей уравнение (4) при $\lambda = +1$ неразрешимо. Укажем решения этой задачи в трехмерном и двумерном случаях, когда соответствующие интегральные уравнения разрешимы. А именно, в трехмерном случае квазипотенциал $\varphi(M)$ в отличие от (2) представляем в виде

$$\varphi(M) = \int\limits_{\Gamma} K(M) \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N} d\sigma_N + \Phi(M, M_0) \int\limits_{\Gamma} g(N) d\sigma_N \ , \quad M \in \mathcal{D} \ , \tag{11}$$

где $\Phi(M, M_0)$—фундаментальное решение уравнения (1) по координатам точки $M$, точка $M_0$ лежит вне области $\mathcal{D}$, ограниченной поверхностью $\Gamma$ (начало координат, если это возможно, целесообразно выбирать в точке $M_0$).

Полагая, что имеет место краевое условие

$$\varphi^+(M) = f(M) \ , \quad M \in \Gamma \tag{12}$$

и находя аналогично (3) предельные значения квазипотенциала (11), получаем для $g(M)$ интегральное уравнение

$$g(M) + 2 \int\limits_{\Gamma} \left[ K(N) \frac{\partial \Phi(M, N)}{\partial n_N} + \Phi(M, M_0) \right] g(N) d\sigma_N = 2 f(M) \ , \quad M \in \Gamma \ . \tag{13}$$

Ядро уравнения (13) имеет слабую сингулярность поскольку таковую сингулярность имеет первое слагаемое, (второе слагаемое—непрерывная функция). Интеграл от первого слагаемого в (13) существует в смысле главного значения по Коши.

Исследуем разрешимость уравнения (13). Пусть $g_0(M)$ какое-либо решение соответствующего однородного уравнения

$$g_0(M) + 2\int\limits_\Gamma \left[K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} + \Phi(M,M_0)\right] g_0(N)d\sigma_N = 0\ , \quad M \in \Gamma\ . \tag{14}$$

Левую часть уравнения (14) можно рассматривать как деленное на 2 предельное значение квазипотенциала

$$\widetilde{\varphi}(M) = \int\limits_\Gamma \left[K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} + \Phi(M,M_0)\right] g_0(N)d\sigma_N\ , \quad M \in \mathcal{D}$$

на границе $\Gamma$. Поэтому $\widetilde{\varphi}^+(M) = 0$, $M \in \Gamma$. По теореме единственности решения внешней задачи Дирихле [3] имеем $\widetilde{\varphi}(M) = 0$ , $M \in \mathcal{D}$ или

$$\int\limits_\Gamma K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} g_0(N)d\sigma_N + \Phi(M,M_0)\int\limits_\Gamma g_0(N)d\sigma_N = 0\ , \quad M \in \mathcal{D}\ .$$

Умножаем обе части этого равенства на расстояние $R_{MM_0}$ между точками $M \in \mathcal{D}$ и $M_0 \notin \mathcal{D}$, получаем

$$R_{MM_0}\int\limits_\Gamma K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} g_0(N)d\sigma_N + R_{MM_0}\Phi(M,M_0)\int\limits_\Gamma g_0(N)d\sigma_N = 0\ ,$$
$$M \in \mathcal{D}\ .$$

Так как

$$\Phi(M,M_0) = O(R^{-1}_{MM_0})\ , \quad K(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} = O(R^{-2}_{MM_0}) \text{ при } R_{MM_0} \to \infty\ ,$$

то в последнем равенстве при $R_{MM_0} \to \infty$ первое слагаемое стремится к нулю, а второе—принимает конечное значение. В результате получаем

$$\int\limits_\Gamma g_0(N)d\sigma_N = 0\ . \tag{15}$$

Учитывая (15), замечаем, что уравнение (14) сводится к уравнению (6) при $\lambda = +1$, решение (собственная функция) которого, как показано выше, $g_0(M) = C$. Подставляя это решение в (15), находим $C = 0$ и, окончательно, $g_0(M) \equiv 0$.

Таким образом, уравнение (14) имеет только тривиальное решение и, следовательно, уравнение (13) разрешимо при любой функции $f(M)$. Это означает, что (11)—решение внешней задачи Дирихле, в которой $g(M)$ определяется из уравнения (13).

В двумерном случае $\varphi(M)$ представляем следующим образом

$$\varphi(M) = \int\limits_\Gamma P(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} g(N)dl_N + \int\limits_\Gamma g(N)dl_N\ , \quad M \in \mathcal{D}\ , \tag{16}$$

где $dl_N$—элемент длины контура границы $\Gamma$.

Полагаем, что имеет место на $\Gamma$ условие (12), непрерывно продолжаем квазипотенциал (16) на $\Gamma$ и получаем относительно $g(M)$ интегральное уравнение со слабой сингулярностью (интеграл существует в смысле главного значения по Коши):

$$g(M) + 2\int\limits_{\Gamma}\left[P(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} + 1\right] g(N)dl_N = 2f(M)\ , \quad M \in \Gamma\ . \tag{17}$$

Покажем, что уравнение (17) разрешимо. Пусть $g_0(M)$—решение соответствующего однородного уравнения

$$g_0(M) + 2\int\limits_{\Gamma}\left[P(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} + 1\right] g_0(N)dl_N = 0\ , \quad M \in \Gamma\ . \tag{18}$$

Левую часть (18) можно рассматривать как деленное на 2 предельное значение квазипотенциала

$$\widetilde{\varphi}(M) = \int\limits_{\Gamma} P(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}g_0(N)dl_N + \int\limits_{\Gamma} g_0(N)dl_N\ , \quad M \in \mathcal{D}$$

на границе $\Gamma$. Поэтому $\widetilde{\varphi}^+(M) = 0$, $M \in \Gamma$. По теореме единственности решения внешней задачи Дирихле $\widetilde{\varphi}(M) = 0$, $M \in \mathcal{D}$ или

$$\int\limits_{\Gamma} P(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N}g_0(N)dl_N + \int\limits_{\Gamma} g_0(N)dl_N = 0\ , \quad M \in \mathcal{D}\ .$$

В этом равенстве устремляем точку $M$ в бесконечность и, учитывая

$$P(N)\frac{\partial\Phi(M,N)}{\partial n_N} = O(R_{MN}^{-1}) \text{ при } R_{MN} \to \infty$$

($R_{MN}$— расстояние между точками $M \in \mathcal{D}$ и $N \in \Gamma$), находим, что первое слагаемое в нем обращается в ноль и в результате получаем

$$\int\limits_{\Gamma} g_0(N)dl_N = 0\ . \tag{19}$$

Учитывая (19), замечаем, что (18) принимает вид уравнения (6) в двумерном случае при $\lambda = +1$, решение которого $g_0(M) = C$. Подставляя это решение в (19), находим $C = 0$ и, окончательно, $g_0(M) \equiv 0$.

Таким образом, уравнение (18) имеет только тривиальное решение, и, следовательно, уравнение (17) разрешимо при любой правой части $f(M)$. Это означает, что (16)—решение внешней двумерной задачи Дирихле, в которой $g(M)$ определяется из уравнения (17).

Отметим, что полученные выше результаты остаются в силе для нестационарных краевых задач Дирихле (внутренней и внешней), задачи сопряжения для сред различных проницаемостей (проводимостей), а также задачи эволюции границы раздела жидкостей [4,5], различие вязкостей которых характеризуется параметром $\lambda_\mu$ ($\lambda_\mu \in (-1, 1)$).

# Список литературы


[1] *В.Ф. Пивень.* Интегральные уравнения задачи сопряжения фильтрационных течений в неоднородном слое // Труды Международных школ-семинаров «МДОЗМФ». Вып. 2. Орел. 2003. С. 47–52.

[2] *П.П. Забрейко, А.И. Кошелев, М.А. Красносельский, С.Г. Михлин, Л.С. Раковщик, В.Я. Стеценко.* Интегральные уравнения. М.: Наука. 1968. 448 с.

[3] *В.Ф. Пивень.* Единственность решения граничных задач сопряжения физических процессов в неоднородной среде // Труды X Международного симпозиума «МДОЗМФ». Херсон. 2001. С. 265–269.

[4] *В.Ф. Пивень.* Интегральные и дифференциальные уравнения двумерной граничной задачи о работе системы скважин в неоднородном слое с нестационарной границей раздела жидкостей // Труды X Международного симпозиума «МДОЗМФ». Херсон. 2001. С. 270–275.

[5] *В.Ф. Пивень.* Двумерная задача эволюции границы раздела жидкостей в кусочно-неоднородном слое при наличии массовой силы // Труды XI Международного симпозиума «МДОЗМФ». Харьков-Херсон. 2003. С. 203–208.


## ФРАКТАЛЫ, ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ХАОС И СКЕЙЛИНГ В СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДАХ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК


**А.А. Потапов**

Институт радиотехники и электроники РАН, Москва



Рассмотрены перспективы создания прорывных информационных технологий в рамках нового фундаментального научного направления «Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника: Проектирование фрактальных радиосистем», предложенного и развиваемого автором на основе теории фракталов и детерминированного хаоса в ИРЭ РАН с 80-х гг. XX в.


**Введение.** В настоящее время в связи с разработкой средств снижения радиолокационной и оптической видимости различных целей и интенсивным развитием *стелс-технологий* приоритетными видами разработок становятся новые методы обнаружения и выделения слабых сигналов над уровнем и под уровнем фоновых помех. Как показывает опыт, при обнаружении малозаметных и малоконтрастных целей на фоне земных покровов традиционные классические алгоритмы обнаружения малоэффективны и требуют при этом больших затрат времени. Для успешного решения таких задач необходим поиск и разработка принципиально новых подходов к традиционным задачам статистической радиофизики.

В докладе изложены основы теории, результаты и физические представления о прорывных информационных технологиях, предложенных и развиваемых автором в ИРЭ РАН с использованием текстурных (80-е гг. XX в.) и фрактальных (90-е гг. XX в.) сигнатур/мер на основе принципов детерминированного хаоса для решения современных радиофизических и радиоэлектронных задач (см., например, [1–28] и ссылки в них).

Все исследования проводятся нами исключительно в рамках нового фундаментального междисциплинарного направления, кратко обозначенного как *«Фрактальная радиофизика и фрактальная радиоэлектроника: Проектирование фрактальных радиосистем»*. В настоящее время фрактальная радиофизика и фрактальная радиолокация — весьма активные области исследований, в которых получено множество серьезных результатов [1–28].

Для каждой научной дисциплины весьма важны с точки зрения ее развития, те новые задачи, которые в ней ставятся и возникают. За почти 25-летний период автору удалось разработать ряд важных глав фрактальной радиофизики и фрактальной радиоэлектроники, почти завершающих ее основные построения [1–4]. Одновременно, эти результаты открыли новые широкие выходы этих направлений в классическую радиофизику и радиоэлектронику, и показали перспективы современных больших применений. Следует отметить, что по данному направлению выпущено в свет несколько фундаментальных монографий и опубликовано более 170 научных работ (см., например, [1–28] и ссылки в них).

Рис. 1. Эскиз развития новых информационных технологий.

**1. Фрактальные методы обработки слабых сигналов и полей.** Фрактальные методы являются *принципиально новыми методами обработки* полей и сигналов. Они используют дробную топологическую размерность пространства сигналов и изображений, математический аппарат дробных интегралов и производных (дробных операторов) и свойства самоподобия или скейлинга. Дробные фрактальные размерности $D$ характеризуют не только топологию объектов, но и отражают процессы эволюции динамических систем. Следует отметить, что *в работах ИРЭ РАН, в отличие от зарубежных, с самого начала была заложена идея обработки малоконтрастных изображений, в том числе и фракталов на фрактальном фоне.* По результатам исследований *автором были впервые введены* понятия *текстурных* и *фрактальных сигнатур*, а

научное направление было кратко обозначено, как *фрактальная радиолокация* и *фрактальная радиофизика* [1–4]. На рис. 1 показаны основные направления проводимых в ИРЭ РАН работ и приведены сведения о моменте их интенсивного развертывания (подробно — см. обширные ссылки в монографиях [1–3]).

Разрабатываемые фрактальные цифровые методы позволяют частично преодолевать априорную неопределенность в радиолокационных задачах с помощью информации о *геометрии (топологии) выборки* — одномерной или многомерной [2, 3, 17]. При этом большое значение приобретают *топологические особенности индивидуальной выборки*, а не усредненные реализации.

Для того, чтобы акцентировать внимание на учете этих особенностей автором ранее был специально введен термин *«размерностный склероз»* физических сигналов и сигнатур [1–3, 17]. Введение дробной меры и скейлинговых инвариантов вызывает необходимость работы преимущественно со степенными вероятностными распределениями. Их часто называют *фрактальными распределениями*, а также *распределениями с «тяжелыми хвостами»* или *паретианами* [1–3]. Для распределений с «тяжелыми хвостами» выборочные средние — неустойчивы и малоинформативны из-за неприменимости закона больших чисел. Простые системы обычно имеют экспоненциальное и гауссовское распределения.

Предложенные и экспериментально отработанные эффективные цифровые методы измерения фрактальных характеристик (фрактальных сигнатур, фрактальных кепстров и паретианов) могут быть широко использованы (и уже применяются) в различных физико-технических, астрономических, биологических, медицинских и т.п. исследованиях [1–7, 12, 13, 15, 18–22, 28]. Созданные в ИРЭ РАН методы и алгоритмы вычисления фрактальных сигнатур работоспособны в очень широком диапазоне физических размеров характерных деталей изображений и позволяют легко находить и детектировать *эффекты скейлинга*, замаскированные интенсивными шумами. Таким образом, следует отметить, что в работах ИРЭ РАН были *впервые в мире введены в практику радиофизики и радиоэлектроники* признаки, основанные на *теории дробной меры и физическом скейлинге*.

**2. Концепция фрактальных радиосистем.** Создание первого эталонного словаря фрактальных признаков классов целей и постоянное усовершенствование алгоритмического обеспечения явились основными этапами при разработке первого в мире фрактального непараметрического обнаружителя радиосигналов в виде спецпроцессора [2, 3, 21]. Основываясь на полученных результатах, можно говорить о проектировании не только фрактальных элементов (устройств), но и непосредственно *фрактальных радиосистем* [2–8, 22–28]. Такие фрактальные радиосистемы структурно включают в себя (начиная с входа) фрактальные антенны и цифровые фрактальные обнаружители, основаны на фрактальных методах обработки информации, а в перспективе могут использовать фрактальные методы модуляции и демодуляции радиосигналов [1–4, 28].

В докладе представлены результаты анализа электродинамических свойств фрактальных антенн Серпинского на основе алгоритмов численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений. Анализ проведен для фрактальных антенн с изме-

няющимся углом раствора. Приведены результаты вычисления входного импеданса $Z = \operatorname{Re} Z + i \operatorname{Im} Z$ в диапазоне частот 0,1–10,0 ГГц, определены все резонансные частоты исследуемых фрактальных антенн и ЧИП. В отличие от традиционных методов, когда синтезируются гладкие диаграммы направленности антенны, в основе теории фрактального синтеза заложена идея реализации характеристик излучения с повторяющейся структурой на произвольных масштабах. Это дает возможность создавать новые режимы во фрактальной электродинамике, а также получать принципиально новые свойства. В докладе обсуждается достаточно необычное использование фрактальных частотно-избирательных поверхностей. В частности, размещение фрактальных элементов на корпусе объекта может существенно исказить сигнатуру или радиолокационный портрет объекта.

**3. Моделирование фрактальных импедансов.** Физическое моделирование *дробных интегральных и дифференциальных операторов* позволяет на основе нанотехнологий создавать радиоэлементы на пассивных элементах, моделирующие *фрактальные импедансы* $Z(\omega)$ с частотным скейлингом $Z(\omega) \equiv A(j\omega)^{-\eta}$, где $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $A$ — *const*, $\omega$ — угловая частота. Для этого созданы модели импеданса $Z(\omega)$ в виде бесконечных цепных дробей. В случае конечной стадии построения эквивалентной схемы для $RC$ цепочек, когда используем $n$-ю подходящую дробь к данной непрерывной дроби, можно регулировать диапазоны частот, в которых будет наблюдаться степенная зависимость импеданса вида $\omega^{-\eta}$. В таком случае мы впервые в мире реализуем на практике нелинейный *«фрактальный конденсатор»* [3, 8, 26, 28].

На основе нанофазных материалов также можно создать планарные и объемные наноструктуры, моделирующие рассмотренные выше «фрактальные» радиоэлементы и радиоустройства микроэлектроники, т.е. речь идет о построении *элементной базы нового поколения на основе фрактальных эффектов и свойств.* В частности, элементарное обобщение канторова множества на физическом уровне позволяет перейти к так называемым канторовым блокам в планарной технологии молекулярных наноструктур. В докладе показано, что аналогичные подходы могут быть распространены на широкий класс электродинамических задач при исследовании фрактальных магнонных кристаллов, фрактальных резонаторов, фрактальных экранов и заграждений, а также других фрактальных частотно-избирательных поверхностей и объемов, которые необходимы для реализации предложенных автором фрактальных радиоэлементов и фрактальных радиосистем [1–8, 26].

**Заключение.** В результате чтения лекций по разработанным А.А. Потаповым в ИРЭ РАН фрактальным технологиям и докладам по проекту МНТЦ в 2000 г. и 2005 г. в США (Вашингтон, Нью-Йорк, Хантсвилл, Атланта, Франклин) в декабре 2005 г. американскими специалистами в официальном письме на имя директора ИРЭ РАН академика Ю.В. Гуляева было отмечено, что *«. . . доктор А. Потапов успешно провел несколько семинаров в Центре Космической Плазмы и Аэроисследований Университета Алабамы в Хантсвилле. Семинары были крайне интересны и подтвердили высокую научную квалификацию доктора А. Потапова. Радиолокационные технологии, представленные доктором А. Потаповым, основаны на теории фракталов и являются новыми. Важность этих исследований для международного сообщества специа-*

*листов и ученых неоспорима».*

Тогда же (декабрь 2005 г.) состоялась научная встреча А.А. Потапова с основателем фрактальной геометрии Б. Мандельбротом.

Становление теории фракталов — яркий пример развития нового направления науки, в равной мере основанного как на достижениях в весьма абстрактных областях математики, так и на новом взгляде на давно известный эмпирический материал, который до создания адекватных моделей не поддается даже научному описанию и интерпретации. Применение теории фракталов позволяет вскрыть огромные неиспользуемые ранее резервы и применить их, в частности, в области различных технических приложений. *Кардинальные шаги, заключающиеся в переводе принятых радиосистемой сигналов целочисленной меры в пространство дробной меры и привлечение затем скейлинговых соотношений, позволяют привнести в традиционные области классической радиофизики и радиоэлектроники совершенно новые идеи и методы и получать на их основе достаточно неожиданные для практики, но физически обоснованные результаты.*

# Список литературы


[1] *А.А. Потапов.* Фракталы в радиофизике и радиолокации. М.: Логос, 2002. 664 с.

[2] *А.А. Потапов.* Фракталы в радиофизике и радиолокации: Топология выборки. М.: Университетская книга, 2005. 848 с. (Изд. 2-е, перераб. и доп.).

[3] *А.А. Потапов.* Фракталы и хаос как основа прорывных технологий в современных радиосистемах. Дополнение к книге: Кроновер Р. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Техносфера, 2006. С. 374–479.

[4] *Александр Алексеевич Потапов* (к 55-летию со дня рождения) // Нелинейный мир. 2006. Т. 4. № 4–5. С. 163–164.

[5] *А.А. Потапов.* Синергетические принципы нелинейной динамики и фракталы в разработке новых информационных технологий для современных радиосистем // Радиотехника. 2005. № 8. С. 73–88.

[6] *A.A. Potapov.* New Information Radiophysical Technologies in Radiolocation: Fractal and Synergetic // Proc. 28th ESA Antenna Workshop on Space Antenna Systems and Technologies. Noordwijk (Netherlands): ESTEC, 2005. Pt. 2. P. 1047–1050.

[7] *А.А. Потапов.* Синергетика и проблемы радиоэлектроники: основы, методы, прикладные задачи // В кн.: Синергетика. М.: Изд. МГУ, 2006. Т. 8. С. 163–179.

[8] *A.A. Potapov.* Modern Classes of Fractal Antennas and Fractal Frequency Selective Surfaces and Volumes // Abstracts Int. Conf «Day on Diffraction — 2006». St. Peterburg: SPbU, 2006. P. 84–85.

[9] *Б.В. Бункин, А.П. Реутов, А.А. Потапов и др.* Вопросы перспективной радиолокации (Коллективная монография). М.: Радиотехника, 2003. 512 с.

[10] *С.А. Подосенов, А.А. Потапов, А.А. Соколов.* Импульсная электродинамика широкополосных радиосистем и поля связанных структур / Под ред. А.А. Потапова. М.: Радиотехника, 2003. 720 с.

[11] *Р.П. Быстров, А.А. Потапов, А.В. Соколов.* Миллиметровая радиолокация с фрактальной обработкой. М.: Радиотехника, 2005. 368 с.

[12] *A.A. Potapov, V.A. German.* Detection of Artificial Objects with Fractal Signatures // Pattern Recognition and Image Analysis. 1998. V. 8. № 2. P. 226–229.

[13] *А.А. Потапов, В.А. Герман.* Применение фрактальных методов для обработки оптических и радиолокационных изображений земной поверхности // Радиотехника и электроника. 2000. Т. 45. № 8. С. 946–953.

[14] *А.А. Потапов, В.А. Герман.* Эффекты детерминированного хаоса и странный аттрактор при радиолокации динамической системы типа растительного покрова // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. № 14. С. 19–25.

[15] *А.А. Потапов.* Фрактальный анализ в современных задачах радиолокации и радиофизики // Радиотехника. 2003. № 8. С. 55–66.

[16] *А.А. Потапов.* Новые информационные технологии на основе вероятностных текстурных и фрактальных признаков в радиолокационном обнаружении малоконтрастных целей // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48. № 9. С. 1101–1119.

[17] *А.А. Потапов.* Топология выборки // Нелинейный мир. 2004. Т. 2. № 1. С. 4–13.

[18] *A.A. Potapov, V.A. German.* Digital Fractal Processing in Signal and Image Analysis: Basises, Methods, Applications // Proc. 2nd IASTED Int. Multi-Conf. «Automation, Control, and Information Technology — ACIT'2005», Conf. «Signal and Image Processing». Anaheim, Calgary, Zurich: ACTA Press.; Novosibirsk: IAE SB RAS, 2005. P. 60–65.

[19] *А.А. Потапов, В.А. Герман.* О методах измерения фрактальной размерности и фрактальных сигнатур многомерных стохастических сигналов // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. № 12. С. 1468–1491.

[20] *А.А. Потапов, В.В. Булавкин, В.А. Герман, О.Ф. Вячеславова.* Исследование микрорельефа обработанных поверхностей с помощью методов фрактальных сигнатур // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 5. С. 28–45.

[21] *A.A. Potapov, E.M. Il'yin, E.P. Chigin, V.A. German.* Development and Structures of the First Etalon Dictionary of Fractal Properties of Target Classes // Electromagnetic Phenomena. 2005. V. 5. № 2 (15). P. 105–141.

[22] *Ю.В. Гуляев, С.А. Никитов, А.А. Потапов, А.Г. Давыдов.* О проектировании фрактальных радиосистем. Численный анализ электродинамических свойств фрактальной антенны Серпинского // Радиотехника и электроника. 2005. Т. 50. № 9. С. 1070–1076.

[23] *А.А. Потапов, В.А. Герман, В.А. Потапов.* Фрактальные антенны, фрактальные обнаружители слабых сигналов и фрактальные частотно — избирательные структуры как основа новых радиоэлектронных систем и устройств // Тез. докл. Московской конф. «Фундаментальные и прикладные проблемы современной физики» в рамках Российского Научного Форума «Демидовские чтения». М.: Физический институт им. П.Н. Лебедева РАН, 2006. С. 132–133.

[24] *Ю.В. Гуляев, С.А. Никитов, А.А. Потапов, В.А. Герман.* Применение теории фракталов, дробной меры и скейлинговых эффектов в схемах обнаружителей радиосигналов // Нелинейный мир. 2006. Т. 4. № 4–5. С. 165–171.

[25] *Ю.В. Гуляев, С.А. Никитов, А.А. Потапов, В.А. Герман.* Идеи скейлинга и дробной размерности в схеме фрактального обнаружителя радиосигналов // Радиотехника и электроника. 2006. Т. 51. № 8.

[26] *А.А. Потапов, А.А. Потапов (мл.), В.А. Потапов.* Фрактальный конденсатор, дробные операторы и фрактальные импедансы // Нелинейный мир. 2006. Т. 4. № 4–5. С. 172–187.

[27] *В.В. Колесов, С.В. Крупенин, А.А. Потапов.* Численное моделирование сверхширокополосных фрактальных антенн // Нелинейный мир. 2006. Т. 4. № 4–5. С. 188–194.

[28] *А.А. Потапов.* О фрактальной радиофизике и фрактальной радиоэлектронике // Труды РТИ им. академика А.Л. Минца; Материалы НТК «Инновации в радиотехнических информационно-телекоммуникационных технологиях», посв. 60-летию РТИ им. академика А.Л. Минца. М.: РТИ им. академика А.Л. Минца, 2006.

# РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ, ВЫРАЖЕННЫЕ ЧЕРЕЗ ТЭТА-ФУНКЦИЮ ЯКОБИ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С ГРАНИЦАМИ В ВИДЕ ПРЯМОУГОЛЬНИКА И РАВНОСТОРОННЕГО ТРЕУГОЛЬНИКА

**Н.В. Севостьянова, А.Я. Шпилевой**
Российский государственный университет им.И.Канта,
Россия, Калининград, ул.Невского 14-а, e-mail: theory@tphysalbertina.ru

Для исследования фильтрационных течений жидкости в областях, ограниченных прямоугольником и равносторонним треугольником используется метод изображения особых точек. Получены комплексные потенциалы различных течений в виде бесконечных рядов. В случае, когда области фильтрации ограничены свободной жидкостью для точечного источника решения выражены через тэта-функцию Якоби.

**1.** Для исследования плоско-параллельных течений, подчиняющихся закону Дарси используется комплексный потенциал

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

с помощью которого можно определить скорость фильтрации и давление [1]. В ряде случаев, когда границами разделов области фильтрации являются прямые и окружности для получения комплексного потенциала удобно использовать метод изображения особых точек [2, 3].

**2.** Пусть область фильтрации представляет собой прямоугольник со сторонами x=a и y=b. Полагаем, что область фильтрации окружена свободной жидкостью (остров). В работе [4] с помощью теоремы о прямой получен комплексный потенциал для различных фильтрационных течений.

$$W(z) = \sum_{k,j=-\infty}^{\infty} [f(z + 2ka + 2jbi) + f(-z + 2ka + 2jbi) -$$

$$-\bar{f}(z + 2ka + 2jbi) - \bar{f}(-z + 2ka + 2jbi)], \qquad (1)$$

где f(z)-аналитическая функция, описывающая фильтрационное течение на плоскости в отсутствии границ, и ее особые точки располагаются внутри прямоугольника. Показано, что решение (1) для точечного источника можно выразить через сигма-функцию Вейерштрасса. Покажем, что комплексный потенциал (1) для точечного источника

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - z_0) \qquad (2)$$

можно выразить через тэта-функцию Якоби. Подставляя (2) в (1) и преобразуя полученное выражение, имеем:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi}\{\ln\prod_{k=1}^{\infty}[\sin(\frac{\pi(z+2ka-z_0)}{2ib})\sin(\frac{\pi(z-(2k-2)a-z_0)}{2ib})]+$$
$$+\ln\prod_{k=1}^{\infty}[\sin(\frac{\pi(z-2ka+z_0)}{2ib})\sin(\frac{\pi(z+(2k-2)a+z_0)}{2ib})]-$$
$$-\ln\prod_{k=1}^{\infty}[\sin(\frac{\pi(z+2ka-\bar{z_0})}{2ib})\sin(\frac{\pi(z-(2k-2)a-\bar{z_0})}{2ib})]- \qquad (3)$$
$$-\ln\prod_{k=1}^{\infty}[\sin(\frac{\pi(z-2ka+\bar{z_0})}{2ib})\sin(\frac{\pi(z+(2k-2)a+\bar{z_0})}{2ib})]\}.$$

В выражении (3) синусы выразим через экспоненты, затем полученное выражение преобразуем, используя тэта-функцию Якоби.

$$\vartheta_0(\nu) = H_0\prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k-1}e^{2\pi i\nu})(1-q^{2k-1}e^{-2\pi i\nu}), \qquad (4)$$

где

$$H_0 = \prod_{k=1}^{\infty}(1-q^{2k})$$

В результате комплексный потенциал (3) принимает вид:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi}\ln\frac{\vartheta_0(\nu_1)\vartheta_0(\nu_2)}{\vartheta_0(\nu_3)\vartheta_0(\nu_4)}, \qquad (5)$$

где

$$q = e^{-\pi\frac{a}{b}}, \qquad \nu_1 = \frac{z-z_0+a}{2ib}, \qquad \nu_2 = \frac{z+z_0+a}{2ib}$$
$$\nu_3 = \frac{z-\bar{z_0}+a}{2ib}, \qquad \nu_3 = \frac{z+\bar{z_0}+a}{2ib}$$

**3.** Рассмотрим область фильтрации, ограниченную равносторонним треугольником (рис. 1). Полагаем, что область фильтрации ограничена свободной жидкостью. Для рассматриваемой области в работе [5] с помощью метода изображения особых точек получен комплексный потенциал вида:

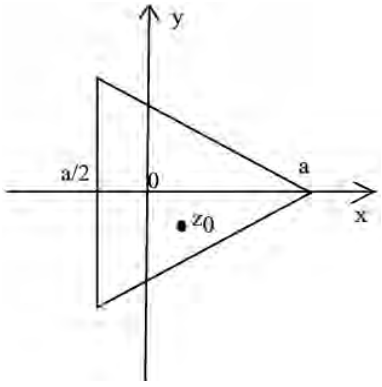


Рис. 1. Область фильтрации.

$$W(z) = \sum_{k,j=-\infty}^{\infty}[f(z-T)+f(-zm+a\bar{m}-am+T)+f(-z\bar{m}-a-a\bar{m}+T)+$$
$$+\bar{f}(z\bar{m}+am-T)-\bar{f}(zm-2a\bar{m}-T)-\bar{f}(-z-a+T)], \qquad (6)$$

где $T = 3a(km+j\bar{m}), \qquad m = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$

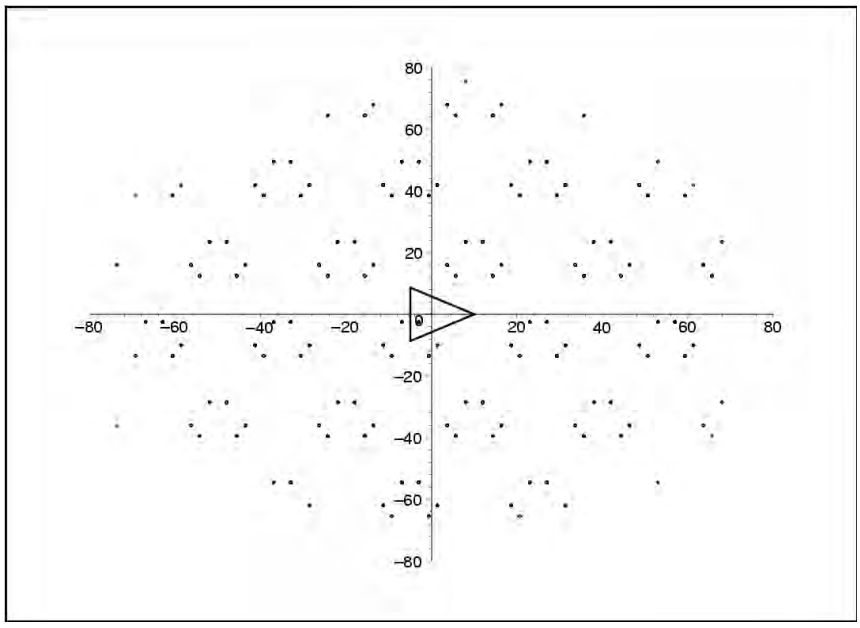



Рис. 2. Положение особых точек.

На рис. 2 действительная особая точка находится внутри треугольника, а точки-изображения во внешней области треугольника. Для построения комплексного потенциала (6) в качестве исходных взяты точки $z_0, z_1, ..., z_6$. остальные точки рядов располагаются на прямых, расположенных под углами $\frac{\pi}{3}$ и $\frac{2\pi}{3}$ к оси OX. Рассмотрим потенциал (6) для точечного источника и выразим его через тэта-функцию Якоби. Для этого воспользуемся преобразованиями, рассмотренными в п.2. преобразуем ряды, входящие в выражение (6) таким образом, чтобы особые точки этих рядов располагались на вертикальных и горизонтальных прямых. Как видно из рис.2 для выполнения этой задачи необходимо взять 12 исходных точек: $z_1, z_2, ..., z_{12}$. Тогда, вместо 6 рядов в комплексном потенциале их получится 12. Записывая комплексный потенциал для функции (2) и производя преобразования, получаем:

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{\vartheta_0(\nu_1)\vartheta_0(\nu_3)\vartheta_0(\nu_5)\vartheta_0(\nu_7)\vartheta_0(\nu_9)\vartheta_0(\nu_{11})}{\vartheta_0(\nu_2)\vartheta_0(\nu_4)\vartheta_0(\nu_6)\vartheta_0(\nu_8)\vartheta_0(\nu_{10})\vartheta_0(\nu_{12})},$$

где

$$\nu_1 = \frac{z - z_0 + b}{2id}, \qquad \nu_2 = \frac{z - z_1 + b}{2id}, \qquad \nu_3 = \frac{z - z_2 + b}{2id},$$

$$\nu_n = \frac{z - z_{n-1} + b}{2id}, \qquad q = e^{-\pi \frac{b}{d}}, \qquad b = \frac{3}{2}a, \qquad d = \frac{3a\sqrt{3}}{2}.$$

$$z_1 = \bar{z_0}m + a\bar{m}, \qquad z_2 = -z_0 m - am + a\bar{m}, \qquad z_3 = \bar{z_0}\bar{m} - 2am,$$

$$z_4 = -z_0 m + am - a, \qquad z_5 = -z_0 - a, \qquad z_6 = z_0 + 3am, \qquad z_7 = \bar{z_0}m + 2am + a\bar{m},$$

$$z_8 = -z_0 m + am + a, \qquad z_{10} = -z_0\bar{m} + am + a\bar{m}, \qquad z_{11} = -\bar{z_0} + 2am - a\bar{m}.$$

Полученные решения удобны тем, что тэта-функция Якоби представима в виде быстро сходящихся рядов. Это дает возможность использовать полученные комплексные потенциалы для решения практических задач гидродинамики, электричества, магнетизма, теплопроводности.

# Список литературы


[1] *О.В. Голубева. Курс механики сплошных сред.* М., 1972. 368 с.

[2] *А.А. Зайцев, А.Я. Шпилевой. Теория стационарных физических полей в кусочно-однородных средах.* // Калининград: изд-во КГУ, 2001. 126 с.

[3] *А.Я. Шпилевой. Метод изображения особых точек в задачах исследования фильтрационных течений в кусочно-однородных средах.* // Труды IX международного симпозиума «МДОЗМФ-2000». Орел. 2000. с. 471–474

[4] *А.Я. Шпилевой. Моделирование фильтрационных течений жидкости в кусочно-однородных средах методом изображения особых точек* // Материалы всероссийской научно-практической конференции: «Вклад земляков-орловцев в развитие и становление российской науки, культуры и образования». Т. III. Орел. 2003. С. 134–136

[5] *Н.В. Севостьянова, А.Я. Шпилевой. Моделирование фильтрационных течений жидкости в области с границей раздела в виде равностороннего треугольника* // Труды международных школ-семинаров «МДОЗМФ». Выпуск 4. Орел. 2005. С. 111–115.


## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ВЛАГИ В СРЕДАХ С ФРАКТАЛЬНОЙ СТРУКТУРОЙ*


**Л.И Сербина**

НИИ прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, г. Нальчик


Одна из проблем создания адекватных математических моделей переноса в природных средах связана с учетом особенностей пространственной структуры и многофазности. Использование фрактальных пространств [1] позволяет объяснить природу сложных нелинейных явлений и эффекты “памяти”. Формализм дробного интегродифференцирования [2] дает новый способ количественного описания нелокальных по времени и пространству процессов.

В настоящей работе в основе исследования одномерного движения влаги в природных пористых средах положено нелокальное дифференциальное уравнение в частных производных дробного порядка

$$D_{0t}^{\alpha}U(x,\eta) = a\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - b\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{1}$$

где $U = U(x,t)$ – влажность в точке $x$ среды в момент времени $t$; $a$ – коэффициент фрактальной диффузии; $b$ – фактическая скорость фильтрации; $D_{0t}^{\alpha}$ – оператор дробного дифференцирования по времени $t$ порядка $\alpha \in [0;1]$. Причем фрактальная размерность среды определяет порядок дробной производной.

В качестве математической модели прогнозирования динамики влаги в почвогрунтах выступает **задача:** Найти регулярное в любой точке $x \in (0;r)$ и для любого момента времени $t > 0$ решение $U = U(x,t)$ уравнения (1), ограниченное при $t \to 0$ и удовлетворяющее условию Коши:

$$U(0,t) = \tau(t), \quad U_x(0,t) = \gamma(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{2}$$


*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96627).

В классе ограниченных функций построен численный алгоритм поиска приближенного решения задачи (2) для уравнения (1). В основе этого алгоритма лежит аппроксимация на каждом шаге $h_i = x_{i+1} - x_i$, $x_i \in (0; r)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ уравнения (1) дифференциальным уравнением дробного порядка

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \lambda \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{a h_i} \left[ (x_{i+1} - x) D^{\alpha}_{0t} U_i(\eta) - (x_i - x) D^{\alpha}_{0t} U_{i+1}(\eta) \right], \tag{3}$$

где $\lambda = b/a$; $U_i = U(x_i; t)$.

Предложенный подход позволил построить решение задачи (2) для уравнения (3), которое с принципиально иной точки зрения объясняет нелинейный характер распространения влаги в почвогрунтах. Важнейшим параметром становится размерность фрактальной среды.

# Список литературы


[1] *Р.П. Мейланов.* Теории фильтрации в пористых средах с фрактальной структурой // Письма в ЖТФ. Т. 22, № 23. С. 40–43.

[2] *Р.Р. Нигматулин.* Дробный интеграл и его физическая интерпретация // ТМФ. 1992. Т. 90, № 3. С. 405.


## ПОЛУКЛАССИЧЕСКИЙ СПЕКТР УРАВНЕНИЯ ДЮФФИНГА


**В.В. Флоринский, Н.А. Чеканов**

Белгородский государственный университет,

г. Белгород, ул. Студенческая, 14


Рассмотрим слабовозмущенный осциллятор с гамильтоновой функцией

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{x^2}{2} + \alpha x^4, \tag{1}$$

в котором импульс $p$ и координата $x$ зависят от времени $\tau$, а $\alpha$ – малый параметр ($\alpha \ll 1$).

Уравнения движения системы (1) можно свести к одному уравнению второго порядка:

$$x'' + x + 4\alpha x^3 = 0, \tag{2}$$

известному в литературе как уравнение Дюффинга.

Квантовым аналогом системы (1) является следующий оператор Гамильтона

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}x^2 + \alpha x^4, \tag{3}$$

который получается из нее известной подстановкой

$$p \to \hat{p} = -i\frac{d}{dx} \tag{4}$$

Для нахождения спектра оператора (3) вначале требуется получить решение уравнения Дюффинга, выражающее координату как функцию времени и не содержащее эллиптических интегралов.

В настоящей работе решение находится методом, предложенным Линдштедтом и развитым Пуанкаре. Согласно этому методу решение уравнения (2) следует искать в виде ряда

$$x(\tau) = x_0(\tau) + \alpha x_1(\tau) + \alpha^2 x_2(\tau) + \ldots + \alpha^n x_n(\tau) + \ldots, \tag{5}$$

причем для избавления от секулярных членов вводится новая переменная $t$:

$$\tau = (1 + \alpha\omega_1 + \alpha^2\omega_2 + \ldots + \alpha^n\omega_n + \ldots)t, \tag{6}$$

где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ – постоянные, выбирая которые соответствующим образом, можно исключить секулярные члены из решения уравнения Дюффинга.

Сделав замену (6) в уравнении (2), подставив в него разложение (5), и приравнивая к нулю коэффициенты при однаковых степенях $\alpha$, получим систему

$$\begin{aligned}
&\ddot{x_0} + x_0 = 0, \quad \ddot{x_1} + x_1 = -2\omega_1\ddot{x_0} - 4x_0^3, \\
&\ddot{x_2} + x_2 = -2\omega_1\ddot{x_1} - (\omega_1^2 - 2\omega_0)\ddot{x_0} - 12x_0^2x_1, \\
&\ddot{x_3} + x_3 = -2\omega_1\ddot{x_2} - (\omega_1^2 + 2\omega_0)\ddot{x_1} - 2(\omega_3 + \omega_1\omega_2)\ddot{x_0} - 12(x_0x_1^2 + x_0^2x_2).
\end{aligned} \tag{7}$$

Из первого уравнения системы (7) находим $x_0 = A\cos(t - t_0)$, где $A$ и $t_0$ – постоянные интегрирования. Подставляя эту функцию в остальные уравнения системы, будем последовательно вычислять $x_1, x_2, \ldots$.

Заметим, что значения констант $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ можно найти уже на данном этапе. Действительно, секулярные члены в решении возникают из-за наличия в правых частях системы (7) слагаемых, содержащих $\cos(t - t_0)$. Приравнивая к нулю коэффициенты при $\cos(t - t_0)$, найдем соответствующие значения $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots$ .

Таким образом, проинтегрировав систему (7), получим решение уравнения Дюффинга, не содержащее секулярных членов. Например, в третьем порядке по $\alpha$ оно имеет вид

$$\begin{aligned}
x(t) = {} & A\cos(t - t_0) + \alpha\left(A\cos(t - t_0) + \frac{1}{8}A^3\cos(3(t - t_0))\right) + \\
& + \alpha^2\left(A\cos(t - t_0) + \left(-\frac{21}{64}A^5 + \frac{3}{8}A^3\right)\cos(3(t - t_0))\right) + \\
& + \alpha^3(A\cos(t - t_0) + \left(\frac{471}{512}A^7 - \frac{105}{64}A^5 + \frac{3}{4}A^3\right)\cos(3(t - t_0)) + \\
& + \left(-\frac{43}{512}A^7 + \frac{5}{64}A^5\right)\cos(5(t - t_0)) + \frac{1}{512}A^7\cos(7(t - t_0))).
\end{aligned} \tag{8}$$

При этом постоянные $\omega_i,\ i = 1, 2, \ldots$ принимают значения

$$\omega_1 = \frac{3}{2}A^2\alpha, \quad \omega_2 = \frac{3}{16}A^2\alpha^2(5A^2 - 16), \quad \omega_3 = \frac{3}{128}A^2\alpha^3(41A^4 - 160A^2 + 192).$$

Постоянные интегрирования $A$ и $t_0$, входящие в решение (8), имеют следующий физический смысл: $A$ - амплитуда колебаний системы (1), а $t_0$ - величина начальной фазы, которую без ограничения общности можно положить $t_0 = 0$

Пусть в начальный момент времени система покоилась, т.е. при $t = 0$ ее полная энергия $E$ была равна потенциальной. Приравняв потенциальную функцию системы $V(A) = \frac{1}{2}x^2(0) + \alpha x^4(0)$ к энергии $E$, получим уравнение, из которого итерационным способом выразим амплитуду $A$

$$A^2 = 2E - \alpha(4E + 9E^2) + \alpha^2\left(2E + 18E^2 + \frac{623}{8}E^3\right) - \alpha^3\left(9E^2 + \frac{623}{4}E^3 + \frac{6608}{9}E^4\right) \quad (9)$$

Подставляя выражение (9) в найденную функцию (8), получим классическое решение уравнения Дюффинга.

Это решение используем для нахождения приближенных собственных значений оператора (3). С этой целью произведем его квантование с помощью известного условия:

$$\frac{1}{2\pi}\oint p\ dx = n + \frac{\mu}{4}, \quad (10)$$

где $p = \dot{x}$ – импульс, $n = 0, 1, 2, \ldots$ – квантовое число, $\mu$ – индекс Маслова; в данной задаче $\mu = 2$.

После возвращения к исходной переменной $\tau$ условие квантования (10) примет вид

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{T}{4}} (x'(\tau))^2 d\tau = n + \frac{1}{2}, \quad (11)$$

где $T$ – период колебаний.

Подставляя в (11) решение (8), предварительно вернув его к старой переменной $\tau$, получим уравнение, из которого выразим $E$ также итерационным способом и, например, в седьмом порядке по малому параметру $\alpha$ получим

$$\begin{aligned}
E_n = {} & n + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\alpha\left(n^2 + n + \frac{1}{4}\right) - \frac{51}{8}\alpha^2\left(\frac{3}{2}n^3 + n^2 + \frac{1}{2}n + \frac{3}{4}\right) + \\
& + \frac{375}{16}\alpha^3\left(n^4 + 2n^3 + \frac{1}{2}n + \frac{1}{16}\right) - \frac{10689}{2048}\alpha^4\left(32n^5 + 48n^4 + 48n^3 + 24n^2 + 6n + 1\right) + \\
& + \alpha^5\left(\frac{87549}{64}n^6 + \frac{262647}{64}n^5 + \frac{1313235}{256}n^4 + \frac{437745}{128}n^3 + \frac{1313235}{1024}n^2 + \right. \\
& \left. + \frac{262647}{1024}n + \frac{87549}{4096}\right) - \alpha^6\left(\frac{3132399}{256}n^7 + \frac{21926793}{512}n^6 + \frac{65780379}{1024}n^5 + \right. \\
& \left. + \frac{109633965}{2048}n^4 + \frac{109633965}{4096}n^3 + \frac{65780379}{8192}n^2 + \frac{21926793}{16384}n + \frac{3132399}{32768}\right) + \\
& + \alpha^7\left(\frac{238225977}{2048}n^8 + \frac{238225977}{512}n^7 + \frac{1667581839}{2048}n^6 + \frac{1667581839}{2048}n^5 + \right. \\
& \left. + \frac{8337909195}{16384}n^4 + \frac{1667581839}{8192}n^3 + \frac{1667581839}{32768}n^2 + \frac{238225977}{32768}n + \frac{238225977}{524288}\right).
\end{aligned} \quad (12)$$

Формула (12) представляет собой приближенное аналитическое выражение спектра оператора (3).

Описанный подход реализован с помощью системы Maple в виде программы LINDA, которая решает уравнение Дюффинга методом Линдштедта-Пуанкаре и производит его полуклассическое квантование.

В разработанной программе на входе необходимо задать порядок приближения $n$ по малому параметру, а выходе выдается аналитическое выражение вида (12) для спектра оператора Гамильтона (3. При этом задаваемый порядок приближения может быть, в принципе, произволен.

Полученные результаты для энергетического спектра хорошо согласуются с имеющимися в литературе. К примеру, Формула (12) полностью совпадает с аналогичной формулой, приведенной в [10], но полученной методом квантовых нормальных форм. В работе [11] собственные значения оператора (3) находятся численно методом диагонализации. Сравнение результатов приведено в таблице справа.

| № | $E$ (12) | $E_{exact}$ | % |
|---|---|---|---|
| 0 | 1.000748940 | 1.000748692 | 0.000025 |
| 1 | 3.006721550 | 3.003739748 | 0.099171 |
| 2 | 5.018619018 | 5.009711872 | 0.177482 |
| 3 | 7.036392596 | 7.018652592 | 0.252118 |
| 4 | 9.059994656 | 9.030549566 | 0.325001 |
| 5 | 11.08937870 | 11.04539059 | 0.396669 |
| 6 | 13.12449936 | 13.06316358 | 0.467338 |
| 7 | 15.16531238 | 15.08358659 | 0.538899 |
| 8 | 17.21177462 | 17.10745779 | 0.606078 |
| 9 | 19.26384411 | 19.13395549 | 0.674261 |
| 10 | 21.32147996 | 21.16333811 | 0.741702 |

В первом столбце указан номер собственного значения, во втором – соответствующее значение, полученное с помощью формулы (12), в третьем – значение, приведенное в [11], в четвертом – относительное отклонение, которое, как видно из таблицы, не превышает 0.75%.

# Список литературы


[1] *М. Борн.* Лекции по атомной механике. Харьков-Киев: ГНТИ. 1934. С. 312.

[2] *А.И. Воронин, В.И. Ошеров.* Динамика молекулярных реакций. М.: Наука. 1990. С. 424.

[3] *W.H. Miller.* Semiclassical theory of atom-diatom collisions: Path integral and the classical S-matrix. J. Chem. Phys. 1970. v. №5. P. 1949–1959.

[4] *Ридберговские состояния атомов и молекул.* Пер. с англ. под ред. Р. Стеббинса и Ф. Даннинга. М.: Мир. 1985. С. 496.

[5] *А.А. Буреева, В.С. Лисица.* Возмущенный атом. М.: ИздАТ. 1997. С. 464.

[6] *H. Massmann, I.O. Rasmussen.* Unifom semiclassical calculations of heavy ion Coulumb excication. Nucl. Phys. A243 1970. P. 155–174.

[7] *Н. Фрёман, П.У. Фрёман.* ВКБ-приближение. М.: Мир. 1967. С. 168.

[8] *В.П. Маслов, М.В. Федорюк.* Квазиклассические приближения для уравнений квантовой механики. М.: Наука. 1976. С. 292.

[9] *Найфэ А. Методы возмущений* М.: Мир. 1976. С. 456.

[10] *M.K. Ali* The quantum normal form and its equivalents. J. Math. Phys. v. 26 №10. 1985. С. 2565–2572.

[11] *K. Banerjee, S.P. Bhatnagar, V. Choudhry, and S.S. Kanwal.* General anharmonic oscillators. Proc. R. Soc. Lond., A360, 575(1978).

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОДВИЖЕНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА РАЗНОЦВЕТНЫХ ЖИДКОСТЕЙ ВБЛИЗИ БАССЕЙНА В КУСОЧНО-АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ*

**Д.Е. Шестерин**

Орловский государственный университет, Орел, ул. Комсомольская, 95

**1**. Стационарную фильтрацию несжимаемой вязкой жидкости в пористой анизотропной недеформируемой среде описывают закон Дарси

$$\vec{v} = K \cdot \nabla\varphi \ , \quad \varphi = \frac{p + \gamma z}{\mu} \ , \tag{1}$$

где $p$— давление, $\mu$— вязкость жидкости, $\gamma$— удельный вес жидкости, $z$— координата, отсчитываемая по вертикали вверх, $K$— симметричный тензор второго ранга, характеризующий проницаемость среды; и уравнение неразрывности [1]

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \ , \tag{2}$$

записанные в безразмерных величинах.

Двумерную фильтрацию в тонком слое описывают уравнения [3]

$$v_\xi = k_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + k_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad v_\eta = k_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + k_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = -\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \ , \tag{3}$$

где $k_{ij}$, $i, j = 1, 2$ компоненты тензора $K$, $k_{12} = k_{21}$ так как тензор $K$ симметричный, $(\eta, \xi)$— декартовы координаты точки в основании слоя, $H$— толщина слоя. Перейдем в плоскости $(\eta, \xi)$ к координатам $p$ и $q$, характеризующих главные направления анизотропии. Динамический процесс в этих координатах описывают уравнения:

$$v_p = k_p\frac{\partial\varphi}{\sqrt{E}\partial p} = \frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\sqrt{G}\partial q} \ , \quad v_q = k_q\frac{\partial\varphi}{\sqrt{G}\partial q} = -\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\sqrt{E}\partial p} \ , \tag{4}$$

где $k_p$, $k_q$— коэффициенты, характеризующие проницаемость среды вдоль главных направлений анизотропии, $E$ и $G$— коэффициенты Ламе, связанные с квадратом элемента дуги плоскости формулами

$$ds^2 = Edp^2 + Gdq^2, \quad E = \sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial p}\right)^2} \ , \quad G = \sqrt{\left(\frac{\partial\xi}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial q}\right)^2} \ . \tag{5}$$

Запишем уравнения (4) в каноническом виде. Для этого воспользуемся заменой переменных $p$, $q$ переменными $x$, $y$, которые связаны уравнениями Бельтрами:

$$\sqrt{\frac{k_p}{k_q}\frac{G}{E}}\frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial y}{\partial q} \ , \quad \sqrt{\frac{k_q}{k_p}\frac{E}{G}}\frac{\partial x}{\partial q} = -\frac{\partial y}{\partial p} \ . \tag{6}$$

Частные решения этих уравнений связаны конформными преобразованиями. Выбирая одно из решений этих уравнений в качестве новых координат запишем уравнения (4) в виде:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{P}\frac{\partial\psi}{\partial y} \ , \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{1}{P}\frac{\partial\psi}{\partial x} \ , \quad P = H\sqrt{k_p k_q} \ . \tag{7}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 06-01-96303).

**2**. Рассмотрим частный случай динамических процессов в анизотропных слоях, отвечающих следующим условиям: сеть координат $(p, q)$ изотермическая (т.е. $\sqrt{E} = \sqrt{G} = C$, $ds^2 = C^2(p,q)(dp^2 + dq^2)$); коэффициенты $k_p$ и $k_q$, характеризующие среду вдоль главных направлений анизотропии постоянны; слой имеет постоянную толщину $H = 1$.

В этом случае уравнения (4) примут вид:

$$Cv_p = k_p \frac{\partial \varphi}{\partial p} = \frac{\partial \psi}{\partial q} \ , \quad Cv_q = k_q \frac{\partial \varphi}{\partial q} = -\frac{\partial \psi}{\partial p} \ . \tag{8}$$

В этом случае решение уравнений (6) имеет вид:

$$x = \sqrt{\frac{k_q}{k_p}} p \ , \quad y = q \ . \tag{9}$$

Вводя обозначения

$$v_x = \frac{Cv_p}{\sqrt{k_q k_p}} \ , \quad v_y = \frac{Cv_q}{k_q} \ , \quad \Phi = \varphi \ , \quad \Psi = \frac{\Psi}{\sqrt{k_p k_q}} \tag{10}$$

В итоге уравнения (8) принимают вид

$$v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \ , \quad v_y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \ . \tag{11}$$

Таким образом, рассматриваемый случай сводится к процессу в изотропно-однородном слое и описывается аналитической функцией

$$W(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$$

в плоскости $(x, y)$.

**3**. Продвижение границы «разноцветных» жидкостей описывает уравнение, записанное в безразмерных величинах

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \ , \quad \vec{r} = (x, y) \ , \quad (x, y) \in \Gamma_t. \tag{12}$$

Положение подвижной границы раздела жидкостей $\Gamma_t$ в координатах $(x, y)$ будем задавать параметрически

$$\Gamma_t : \ x = x(t, S) \ , \quad y = y(t, S) \ , \tag{13}$$

где $S$— параметр. Положение границы $\Gamma_t$ в начальный момент времени $t = 0$ считаем известным

$$\Gamma_0 : \ x_0 = x_0(0, S) \ , \quad y_0 = y_0(0, S) \ , \tag{14}$$

Подставляя выражения для скоростей (11) в (13) получим дифференциальные уравнения движения точек границы $\Gamma_t$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x} \ , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial y} \ . \tag{15}$$

Таким образом, для нахождения положения границы $\Gamma_t$ в любой последующий момент времени $t > 0$ требуется решать уравнения (15) при начальных условиях (14).

**4**. Рассмотрим фильтрацию жидкости в кусочно-анизотропной среде. Пусть оси выбранной в основании слоя системы координат $(pOq)$ совпадают с главными направлениями анизотропии, грунт в области фильтрации характеризуется постоянными коэффициентами $k_q$, $k_p$. Область фильтрации $D$ сопрягается с бассейном свободной жидкости вдоль кривой $\Gamma$ (класса Ляпунова). Положим нормаль к границе $\Gamma$ направленной в область $D$. На границе $\Gamma$ выполняется следующее условие:

$$\varphi(M) = 0 \ , \quad M \in \Gamma \ . \tag{16}$$

Перейдем к вспомогательной плоскости $(x, y)$ используя квазиконформное преобразование (9). В силу обозначений (10) сохраняются граничные условия, заданные в плоскости $(p, q)$, но уже на новой границе $L'$ плоскости $(x, y)$, которая представляет собой границу $\Gamma$, преобразованную с помощью соотношений (9). Решение задачи ищем в виде

$$\varphi(M) = \varphi_0(M) + \Phi(M) \ , \quad M \in \mathcal{D} \ , \tag{17}$$

где $\varphi_0(M)$— квазипотенциал, описывающий течение в области $D$ в отсутствии границы бассейна $\Gamma'$, $\Phi(M)$— потенциал возмущения. Потенциал возмущения ищем в виде потенциала двойного слоя

$$\Phi(M) = \int\limits_{\Gamma'} g(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} dl_N \ , \quad N \in \Gamma' \ , \quad M \in \mathcal{D} \ , \tag{18}$$

где $F(M, N)$— первое фундаментальное решение уравнений (11),

$$F(M,N) = \frac{1}{2\Pi} \ln \frac{1}{r_{MN}} \ .$$

Потенциал $\Phi(M)$ удовлетворяет условиям в бесконечности

$$\Phi(M) = O\left(\frac{1}{r_{MN}}\right) \ , \quad \nabla|\Phi(M)| = O\left(\frac{1}{r_{MN}^2}\right) \ , \quad r_{MN} \to \infty \ , \ M \in D \ , \ N \in \Gamma' \ .$$

Непрерывно продолжая (17) на границу $\Gamma$ получим

$$\Phi^+(M) = \int\limits_{\Gamma'} g(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} dl_N + \frac{g(M)}{2} \ , \quad M, N \in \Gamma' \ , \tag{19}$$

Здесь знак «+» обозначает значение соответствующей функции при подходе к границе со стороны нормали. Интеграл (18) следует понимать в смысле главного значения по Коши. Подставляя (18) в (17) с учетом условия (16) получим

$$g(M) + 2 \int\limits_{\Gamma'} g(N) \frac{\partial F(M,N)}{\partial n_N} dl_N = -2\varphi_0(M) \ , \quad M \in D \ , \quad N \in \Gamma' \ . \tag{20}$$

Это уравнение второго рода типа Фредгольма. Решая уравнение (19) относительно плотностей $g(N)$, подставляя их в (18) с учетом (17) и найдя таким образом квазипотенциал фильтрации $\varphi(M)$ и интегрируя дифференциальные уравнения (15) при

начальных условиях (14) найдем положение границы раздела «разноцветных жидкостей» в любой момент времени $t > 0$.

Рассмотрим случай, когда граница бассейна свободной жидкости $\Gamma$ (в плоскости $(p, q)$) представляет собой окружность радиуса $r = 1$ (примем радиус окружности за характерный размер) с центром в начале координат (рис. 1). На единичном расстоянии от границы окружности работает источник загрязнения дебитом $Q = 1$. В начальный момент времени $t = 0$ считаем, что граница загрязнения совпадает с контуром скважины.

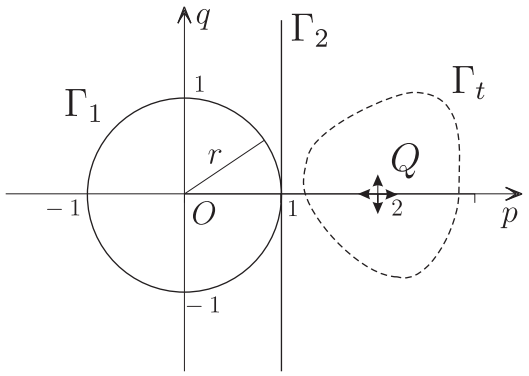



Рис. 1. Постановка задачи.

Исследуем зависимость времени загрязнения бассейна от соотношения проницаемостей грунта вдоль главных направлений анизотропии $k_p$ и $k_q$. В качестве характерного времени выберем время загрязнения бассейна при $k_p/k_q = 1$, т. е. в случае изотропного грунта.

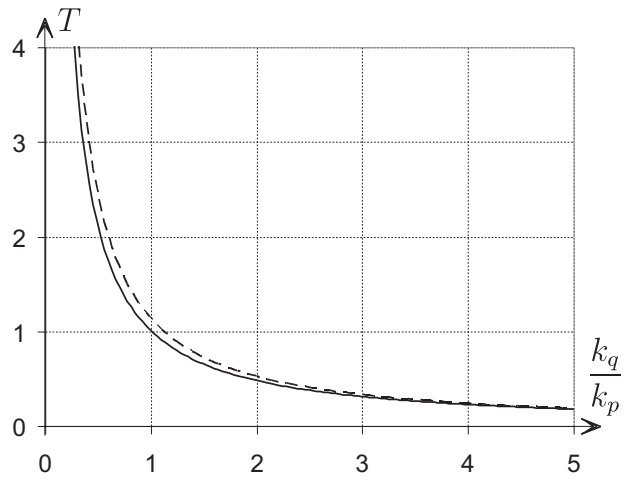



Рис 2. Зависимость времени достижения загрязнением бассейна от соотношения проницаемостей грунта вдоль главных направлений анизотропии в случае границ в виде прямой (сплошная линия) и окружности (пунктирная линия).

На рис. 2 приведена зависимость времени загрязнения бассейна от соотношения $k_q/k_p$ для случая границы бассейна в виде окружности единичного радиуса (пунктирная линия) и границы в виде бесконечной прямой (сплошная линия), находящейся на таком же расстоянии от источника загрязнения (в этом случае время загрязнения бассейна может быть также найдено аналитически [2]). Как видно из графиков на , загрязнение всегда быстрее достигает бассейна с границей в виде прямой, однако различие во времени невелико и, как показывает численный эксперимент, при отношении $k_q/k_p > 3$ различие во времени достижения не превышает 5%.

# Список литературы


[1] *О.В. Голубева.* Курс механики сплошных сред. М:. Высшая школа. 1971.

[2] *В.Ф. Пивень.* О фильтрации в неоднородной анизотропной среде // Движение растворимых примесей в фильтрационных потоках. Тула. 1984. С. 44-49. 448 с.

[3] *В.М. Радыгин, О.В. Голубева* Применение функции комплексного переменного в задачах физики и техники. М:. Высшая школа. 1983.

# Физическая кинетика и механика дисперсных систем

## ТЕЧЕНИЕ ВЫСОКОКОНЦЕНТРИРОВАННЫХ ОБРАТНЫХ ЭМУЛЬСИЙ В МИКРОКАНАЛАХ*

**А.Т. Ахметов, М.В. Мавлетов, А.Г. Телин, С.П. Саметов**
450054, Уфа-54, пр. Октября, 71, Институт механики УНЦ РАН,
450074, Уфа-74, ул. Фрунзе, 32, Башкирский государственный университет

Одним из замечательных свойств дисперсных систем типа жидкость-жидкость является их высокая вязкость, в десятки раз превышающая величину вязкости составляющих эмульсию компонент. При течении в микроканалах высоконцентрированных обратных водоуглеводородных эмульсий (микрокапли воды в углеводородной фазе) обнаружено новое удивительное свойство - динамическое запирание [1]– [3]. Эффект динамического запирания, заключается в том, что течение эмульсии, несмотря на наличие постоянно действующего усредненного перепада давления, со временем практически полностью прекращается. Наличие данного эффекта заставляет пересмотреть принципы применения эмульсий в различных технологических процессах [4] и дает возможность разработки более совершенных технологий.

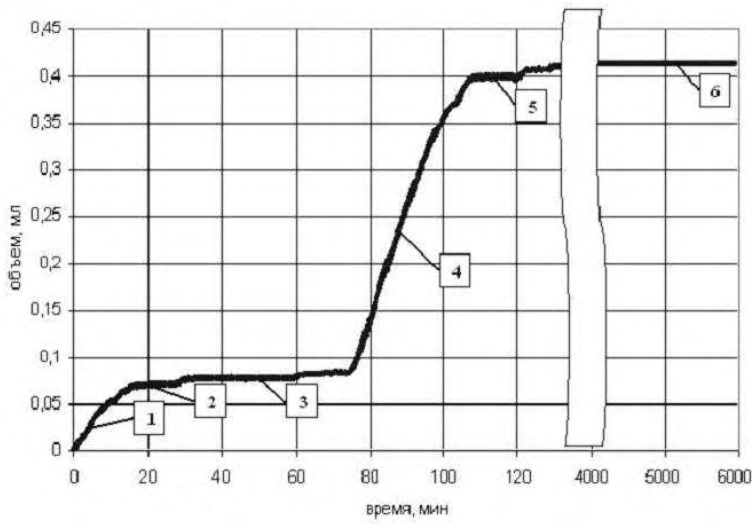



Рис. 1. Зависимость объема протекшей через капилляр (d=100 мкм, l=4 см) при ступенчатом изменении перепада давления от 0,1 МПа/м до 0,2 МПа/м, от времени. Цифры в кружках соответствуют микровидео-изображениям на следующем рисунке).

*Работа выполнена при частичном финансировании из грантов: государственной поддержки ведущих научных школ РФ (Грант НШ-7055.2006.1) "Многофазные течения с фазовыми превращениями" и по программе фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН "Динамика и акустика неоднородных жидкостей газожидкостных систем и суспензий".

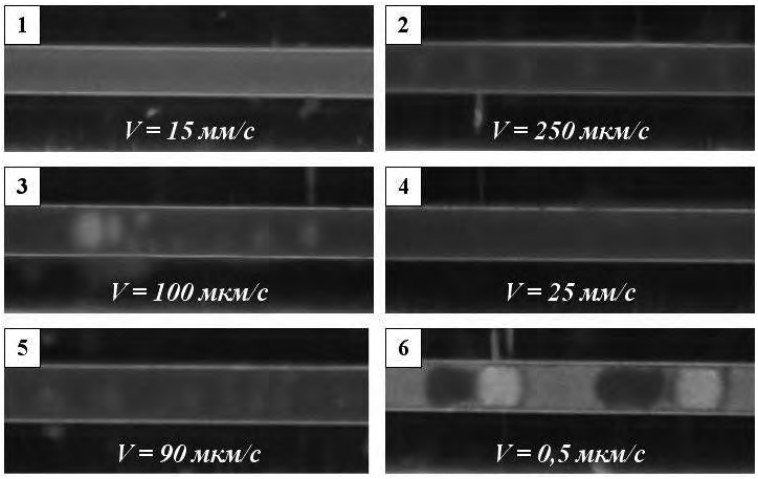



Рис. 2. Изменение структуры и скорости потока во времени

Проведенные реологические измерения на ротационном вискозиметре методом "конус-пластина" показали, что все исследованные эмульсии (стабилизированные ПАВом, нестабилизированные искусственным эмульгатором и с различным составом дисперсной среды (гексан, нефть) и дисперсионной фазы (вода, минерализованная вода, пластовая вода)) проявляют свойства псевдопластичных жидкостей [5], [6], т.е. зависимость касательного напряжения от скорости деформации сдвига описывается степенной зависимостью. Вязкость стабилизированной эмульсии со временем увеличивается, а вязкость нестабилизированной эмульсии уменьшается. Движение в капилляре обратной высококонцентрированной водонефтяной эмульсии (минерализованная вода – 73 %, эмульгатор Нефтенол НЗ 40 Н – 4 %, нефть – 20 %, 32-процентный водный раствор хлорида кальция – 3 %) при постоянном действующем усредненном перепаде давления 2,5 МПа/м со временем через 30 минут по показаниям регистрирующей расход системы полностью прекращается - наступает состояние запирания. Но при визуальном наблюдении за потоком в микроскоп в течении некоторого времени наблюдаются конвульсивные изменения скорости потока (кадр 2, 3) рис.2, скорость в капилляре на 2 порядка снижается по сравнению с исходной (кадр 1). При увеличении давления до 5 МПа/м течение эмульсии возобновляется. Типичная структура потока приведена на кадре 4. Однако с течением времени движение по показаниям регистрирующей системы снова прекращается. Но на микровидеозаписи обнаруживается очень медленное поршневое движение, скорость которого на 2 порядка меньше исходного. В состоянии "запирания" скорость движения в капилляре продолжает уменьшаться, несмотря на постоянно действующий перепад давления. Структура потока существенно преображается, если в гидродинамическом потоке картина однородна (кадры 1, 4), то в состоянии "запирания" наблюдается перемежающаяся структура (кадры 2, 3, 5). По прошествию большего времени структура становится более ярко выраженной, и в ней появляются новые элементы (кадр 6). Здесь различаются 3 составляющие: нефтяная - светлая, эмульсия - темная, и выделившаяся водная фаза - светлая с ограничивающими менисками, а скорость падает на 4 порядка.

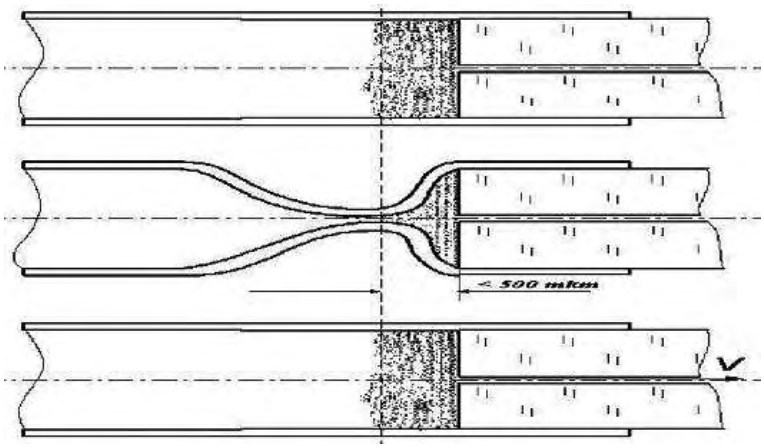



Рис. 3. Схематическая иллюстрация упрощенного метода оценки размеров зоны, определяющей эффект запирания

Явление "запирания" (blocking phenomena) [7] в суспензиях интуитивно понятно. Оно в основном обусловлено "сухим" трением между твердыми частицами. В случае же дисперсий из микрокапель жидкостей обоснованных предположений о механизме запирания не возникало. Поэтому, с одной стороны, были проведены эксперименты с упрощенным химическим составом эмульсий: a) бралась обратная водонефтяная дисперсия без искусственного эмульгатора [2], b) минерализованная вода была заменена дистиллированной, углеводородная фаза – нефть гексаном. С другой стороны, провели ряд экспериментов по изучению процессов у входа в капилляр. Эксперименты показали, что как эмульсия без искусственного эмульгатора, так и эмульсия с упрощенным химическим составом проявили эффект динамического запирания. Однако структура, столь отчетливо наблюдавшаяся после "запирания" в капилляре с водонефтяной эмульсией, для водогексановой эмульсии не отчетлива, а в ряде случаев совсем не проявляется. Поскольку квазипериодические четки наблюдаются по всей длине капилляра (скорость ползущей структуры составляет 1–5 мкм/с), это позволяет предположить, что формирование структур происходит у входа в капилляр. Тогда и запирание обусловлено процессами у входа, и можно выдвинуть временную рабочую гипотезу, основанную на том, что между микрокаплями эмульсии проявляется "сухое трение", которое определяет запирание у входа. Образуется "пробка" из микрокапель воды, через которую фильтруется несущая фаза (нефть).

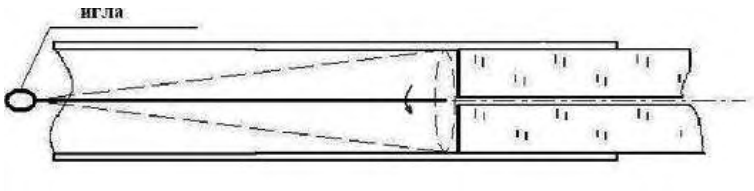



Рис. 4. Схематичное изображение разрушения образовавшейся структуры на входе в капилляр при помощи иглы

Для определения размеров "пробки" были проведены 2 эксперимента. Первый – с помощью тонкого остроконечного зажима подводящая эмульсию к капилляру по-

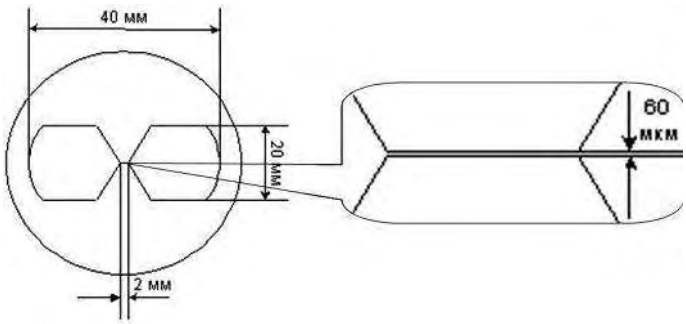



Рис. 5. Гидродинамический аналог цилиндрического капилляра

лиэтиленовая трубка (диаметр 1,5 мм), пережималась на расстоянии 1 мм, 0,5 мм. Лишь при уменьшении до 0,5–0,2 мм запирание прерывалось, и начиналось течение эмульсии (рис. 3). Второй, по предложению чл.-корр. РАН В.П. Казакова - в трубку помещалась иголка, при помощи которой у входа капилляра, совершались всевозможные движения, предположительно разрушающие "пробку" (рис. 4). Только в случаях, когда иголка скреблась по поверхности стеклянного капилляра, снова возникало течение, что также говорит о малых размерах "пробки". Далее система снова переходила в состояние "запирания", но значительно быстрее. Повторные "ковыряния" не приводили к возникновению течения.

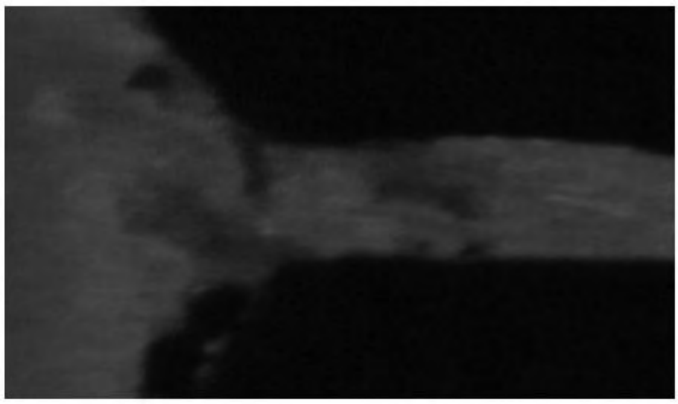


Рис. 6. Видеоизображение канала в центральной части ячейки Хили-Шоу в состоянии запирания

Т. к. в толстом слое (1,5 мм) эмульсии в подводящей полиэтиленовой трубке ничего увидеть невозможно, решили рассмотреть как бы сечение этой системы (капилляр-трубка). Из алюминиевой фольги толщиной 20 мкм была вырезана фигура (см. рис. 5), которую зажимали между двумя оптическими стеклянными пластинами с высоким качеством плоскостности. Капилляру соответствует микроканал шириной 60 мкм. Эмульсия подается и отводится через отверстия в верхней пластине, расстояние между которыми 35 мм. Течение до входа в микроканал и после него соответствует плоскому течению в ячейке Хили-Шоу. Особенность процессов в этой модели состоит в том, что в начальный момент времени наблюдаются отчетливые радиальные потоки по обе стороны микроканала, через некоторый промежуток времени движение в ячейке начинает конвульсивно приостанавливаться, и далее запирается. Во входной части ячейки

всегда наблюдается радиально-сходящееся течение. В выходной части происходит хаотизация, и далее проявляется эквипотенциальные линии, по всей видимости, соответствующие изобарам, движение в масштабе ячейки полностью останавливается. Исходя из этого, можно сделать вывод, что до "запирания", когда наблюдаются радиальные потоки, в обеих половинках ячейки перепад давлений приходится на микроканал, а когда течение останавливается, и наблюдаются эквипотенциальные линии, перепад давления приходится на микроканал и вторую часть модели. Как и ожидалось, у входа модели капилляра возникает плотная структура, предположительно запирающая модель (рис. 6). Однако данная структура наблюдается не в каждом случае, поэтому разгадка механизма запирания пока остается открытой.

В заключение можно отметить, что обнаруженный эффект динамического запирания заставляет пересмотреть принципы применения широко используемых в потокоотклоняющих технологиях и технологиях глушения скважин высококонцентрированных обратных водонефтяных эмульсий.

## Список литературы


[1] *Alfir T. Akhmetov, Alexey G. Telin, Vladimir V. Glukhov.* XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics Abstracts. 2004. P. 162.

[2] *А. Ахметов, А. Телин, В. Глухов, М. Силин.* Технологии ТЭК. 2004. № 1. С. 33–36.

[3] *A.T. Akhmetov, A.G. Telin, M.T. Mavletov, S.P. Sametov, M.J. Silin.* International Conference "Fluxes and Structures in Fluids" Selected Papers. 2005. P. 16–21.

[4] *А.Т. Ахметов, А.Г. Телин, М.В. Мавлетов, С.Е. Здольник.* Нефтегазовое дело. 2005. № 3. С. 119-126.

[5] *А. Ахметов, А. Телин, А. Корнилов.* Научно-технический вестник ЮКОС. 2004. № 9. С. 43–50.

[6] *А.Т. Ахметов, В.В. Глухов, М.В. Мавлетов, А.Г. Телин.* Материалы III Всероссийской научно-практической конференции "Добыча, подготовка, транспорт нефти и газа". 2004. С. 13–17.

[7] *Eiichiro Yamaguchi, Ronald J. Adrian.* XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics Abstracts. 2004. P. 31.


## ДИНАМИЧЕСКОЕ ЗАПИРАНИЕ ОБРАТНОЙ ВОДОНЕФТЯНОЙ ДИСПЕРСИИ ПРИ РАДИАЛЬНО-РАСШИРЯЮЩЕМСЯ ТЕЧЕНИИ В ЯЧЕЙКЕ ХИЛИ-ШОУ


**А.Т. Ахметов, А.А. Рахимов, А.К. Ахметов**

450054, Уфа-54, пр. Октября, 71, Институт механики УНЦ РАН,

450074, Уфа-74, ул. Фрунзе, 32, Башкирский государственный университет


Удивительный эффект динамического запирания течения дисперсной системы "жидкость-жидкость" при постоянном усредненном градиенте давления был обнаружен в осесимметричном и плоском потоках. Он заключается в том, что, несмотря на действие постоянного перепада давления на отрезке капилляра и ячейке Хили-Шоу, течение жидкости со временем останавливается [1].

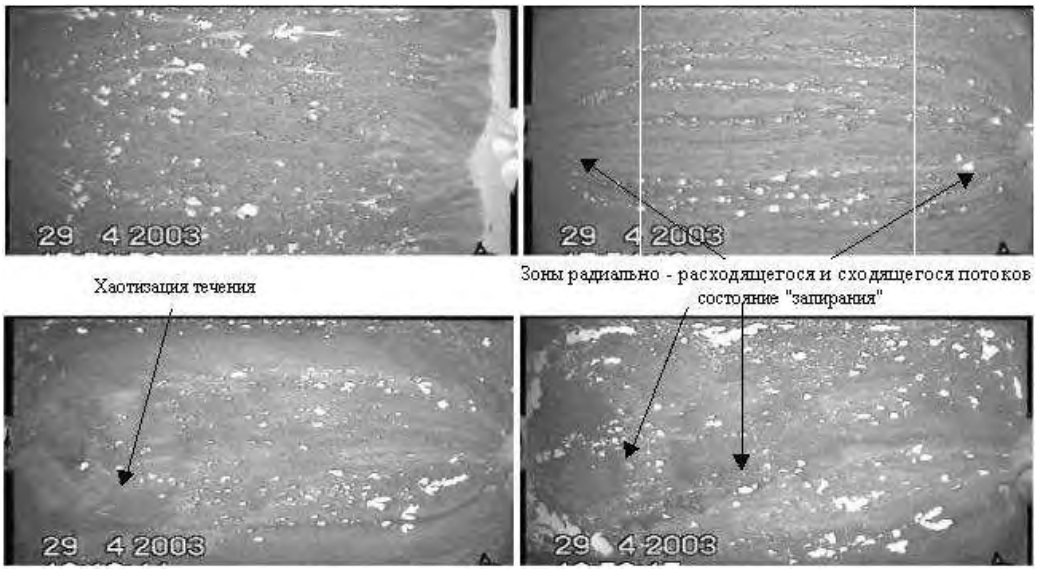



Рис. 1. Структура плоского течения в ячейке Хили-Шоу при перепаде давления 200 кПа, наблюдающиеся капли воды образовались из микрокапель эмульсии (4 кадра соответствуют 7 с, 120 с, 1320 с, 3480 с от начала нагнетания).

Следует отметить, что общим в экспериментах с капилляром и ячейкой Хили-Шоу является то, что градиент давления на основных участках при ламинарном течении не изменяется. Отличие же в том, что в ячейке Хили-Шоу реализуются различные типы течения (рис.1) [2]: радиально – расширяющееся течение, вследствие того, что жидкость подается через отверстие (входная зона), однородное течение (основная часть) и радиально – сходящееся (выходная зона). На видеокадрах видно, что на 120-й с сформировались трубки тока на 1320 с структура течения изменилась, расход уменьшился, а на 3480 с картина соответствует полному запиранию по показанию весов. Возникает вопрос, как будет изменяться структура течения и расход эмульсии в радиально – расширяющемся потоке со временем.

Как и в приведенном выше эксперименте была использована стабилизированная нефтенолом водонефтяная эмульсия (состав: минерализованная вода – 73%, эмульгатор нефтенол НЗ – 4%, нефть – 20%, 32% водный раствор хлорида кальция – 3%), любезно предоставленная фирмой Химеко ГАНГ.

Стабилизированная эмульсия отличается большой динамической стабильностью [3], и даже имеющиеся капли в процессе измерения вязкости диспергируют в микрокапли [4]. Реологические характеристики измерялись на ротационном вискозиметре, с системой конус-пластина. Измерения касательного напряжения при постепенном повышении скорости деформации сдвига до определенного значения (прямой ход), а далее понижении (обратный ход) показывают, что по мере измерения эмульсия упрочняется (рис.2).

Параметры аппроксимационной зависимости $\tau = k\dot{y}^n$ для водонефтяной эмульсии приведены на графике.

Процесс упрочнения наиболее ярко проявляется при снятии зависимости касательного напряжения от времени при постоянном значении $y = 900c^{-1}$(рис.3), т.е. эмульсия

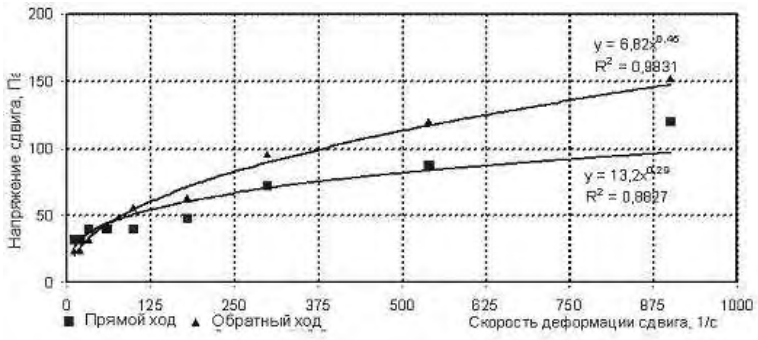



Рис. 2. Зависимость касательного напряжения от скорости деформации сдвига.

обладает свойством реопексии [4]. Следует также отметить, что кривая "упрочнения", как видно на графике, насыщается через 35 минут.

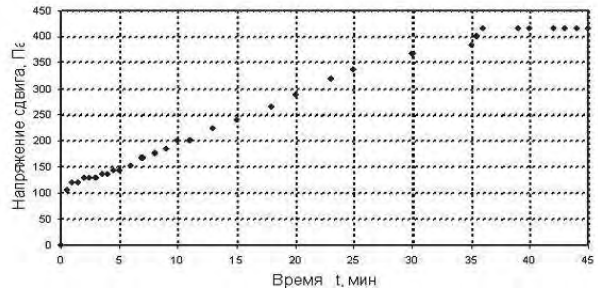



Рис. 3. Зависимость касательного напряжения сдвига от времени при скорости деформации сдвига $y = 900c^{-1}$

Радиально – расширяющийся поток был реализован между двумя цилиндрическими плоскопараллельными стеклянными оптическими пластинами, с зазором между пластинами 17 или 35 мкм и диаметром 57 мм. В центре одной из них было просверлено отверстие диаметром 2 мм, в которое была вставлена полиэтиленовая трубка с внутренним диаметром 1,43 мм, по ней при постоянном избыточном давлении подавалась эмульсия. На внешней образующей пластин было атмосферное давление. Картина радиально - расширяющегося течения записывалась на цифровую видеокамеру в масштабе модели и микромасштабе через микроскоп Stemi – 2000C. Расход измерялся по перемещению мениска в градуированной трубке, по которой поступала эмульсия. Была проведена серия экспериментов с зазором 17 мкм и 35 мкм, при различных перепадах давления от 50 кПа до 300 кПа между входным отверстием и внешней образующей пластин. По показаниям градуированной трубки и по визуальным наблюдениям картины течения в масштабе модели движение эмульсии со временем во всех проведенных экспериментах полностью останавливается в интервале времени от 22 минут до 2,4 часа от начала эксперимента. На рис.4 приведен характерный результат, иллюстрирующий изменение расхода при ступенчатом увеличении давления после запирания. Увеличение давления на входе вдвое приводит к возобновлению движения с расходом несколько меньшим начального, и запирание наступает намного раньше. Повторное удвоение давления вновь приводит к возобновлению движения, но через час система вновь переходит в состояние запирания. При увеличении перепада давле-

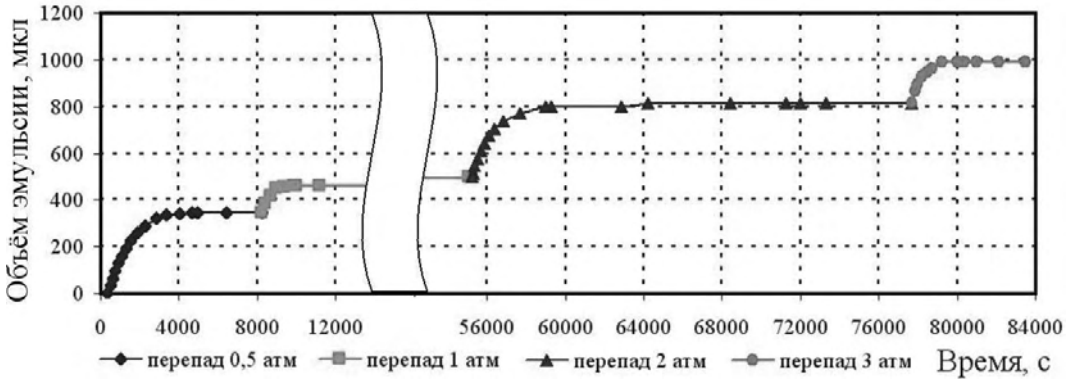



Рис. 4. Зависимость объёма протекшей эмульсии от времени при ступенчатом изменении перепада давления.

ния между входом и выходом до 300 кПа система приходит к состоянию запирания уже через 20 мин.

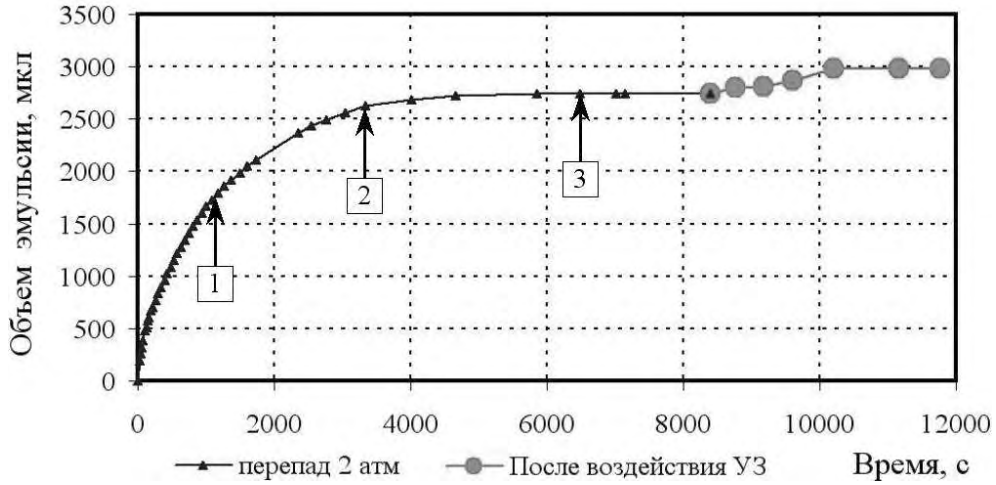



Рис. 5. Зависимость объёма протекшей эмульсии от времени при постоянно действующем избыточном давлении 200 кПа, в период времени 8400 - 8520 с ячейка находилась под воздействием мощных ультразвуковых полей.

Для проверки гипотезы о том, что запирание в радиально – расширяющейся ячейке обусловлено процессами у входа подобно суспензии [5] по предложению чл.-корр. В.П. Казакова был проведен следующий эксперимент: во входное отверстие ячейки (внутри подводящей эмульсию трубки) поместили иголку, которой можно двигать и вращать по всему дну цилиндрического входного отверстия. После наступления состояния запирания мы вращали и скребли иголкой в цилиндре у входа в ячейку. Это привело к тому, что скорость движения в микромасштабе увеличилась в несколько раз, но через 2-3 минуты оно начало конвульсивно приостанавливаться, и система вновь перешла в первоначальное состояние запирания, причем по градуированной трубке движение не было зафиксировано. При повторном шевелении иголкой на входе в ячейку с системой ничего не происходило, даже в масштабе микромодели.

Для качественного сопоставления результатов, приведенных на рис.1, были проведены эксперименты с таким же постоянно действующим избыточным перепадом

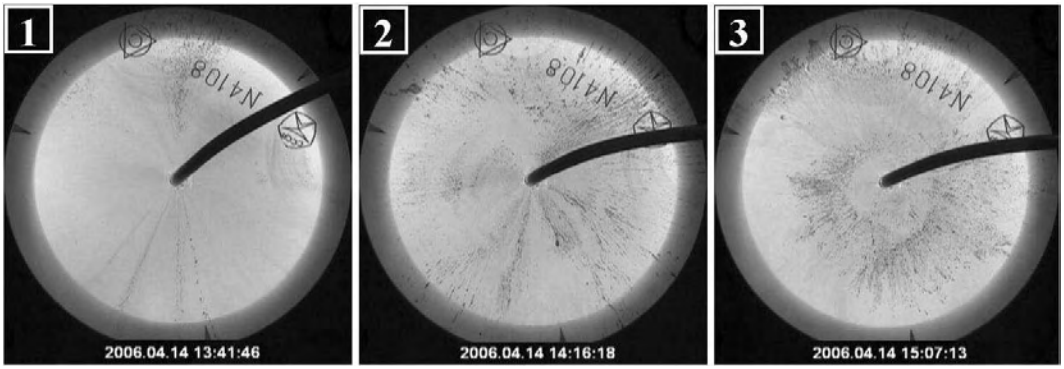



Рис. 6. Изменение структуры течения в радиально – расширяющемся потоке при постоянно действующем перепаде давления $\Delta p$=0,2МПа (цифры 1, 2, 3 соответствуют моментам времени, указанным на рис.5 – 21, 56 и 107 минут от начала нагнетания).

давления – 200 кПа. На рис.5, 6 показаны количественные и качественные изменения в ячейке. В структуре потока сначала происходит формирование радиальных трубок тока, далее проявление хаотизации, подобно ячейке Хили-Шоу, сопровождающаяся уменьшением расхода эмульсии. Через некоторый промежуток времени эмульсия в ячейке начинает конвульсивно запираться, формируются кольцевые контуры изобар и движение в ячейке замирает. Визуализация картины течения позволяет также обнаружить в начале процесса некоторую деструкцию эмульсии - образование капель из микрокапель воды.

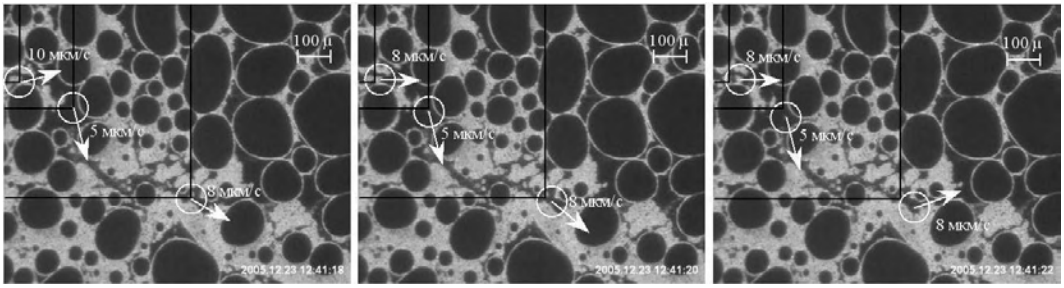



Рис. 7. Микропотоки в состоянии запирания, между приведенными кадрами 2с.

Использование микроскопа позволяет обнаружить в состоянии запирания микропотоки весьма разнообразные по структуре. Одна из структур показана на рис.7. Следует отметить, что микропоток весьма извилист, видимая ширина движущегося потока меняется от 50 мкм до 10 мкм, наибольшая скорость порядка 10 мкм. Вокруг в приведенном масштабе времени всё неподвижно.

После запирания модель помещалась в воду и подвергалась действию ультразвукового излучателя Ультратон (избыточное давление не отключалось). Никаких изменений при 20 минутном воздействии заметить не удалось, значительно более мощные поля в ультразвуковой ванне УЗВ 3/100 ТН, уже через минуту привели к началу движения в ячейке (рис.5). В следующем подобном эксперименте модель находилась в состоянии запирания (при постоянно действующем избыточном давлении 200 кПа) в течение двух суток, после чего помещалась в ультразвуковую ванну на 2, 5, 10 минут.

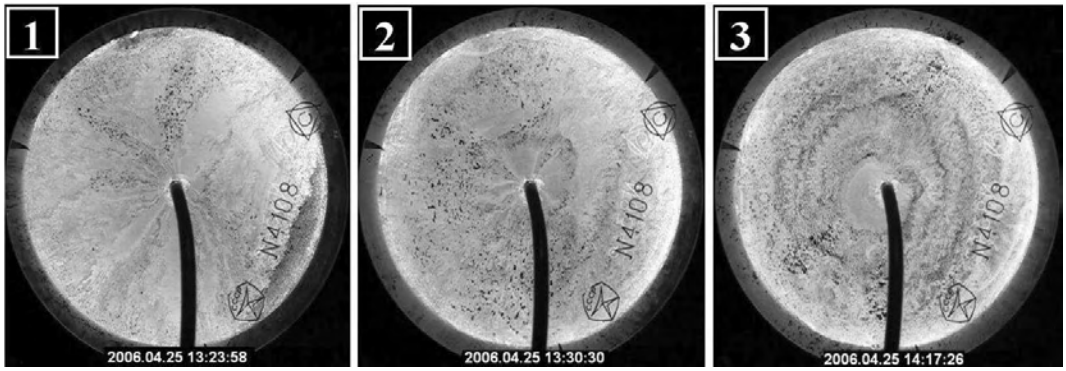



Рис. 8. Изменение структуры течения после воздействия ультразвуковых полей

Структура потока после воздействия мощных УЗ полей (рис.8) меняется приблизительно таким же образом, как и при обычном запирании, при повторных воздействиях картина аналогична. Кривые зависимостей объема протекшей эмульсии приведены на рис.9).(в квадратиках указаны номера кадров, приведенныt на рис.8). Из графиков видно, что увеличение длительности воздействия УЗ полей приводит к увеличению расхода и времени до наступления запирания.

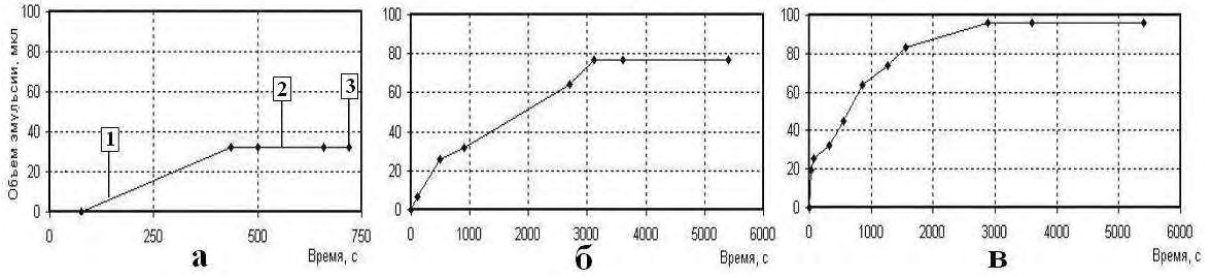



Рис. 9. Влияние мощных УЗ полей на эффект динамического запирания в радиальной ячейке.

Таким образом, при радиально – расширяющемся течении стабилизированная нефтенолом обратная водонефтяная эмульсия (микрокапли воды в нефти) проявляет эффект динамического запирания, при этом трансформирующаяся в ячейке эмульсия образует застойные зоны, которые препятствуют движению закачиваемой эмульсии по радиальным линиям тока.

При моделировании эффекта динамического запирания наряду с процессами, происходящими у входа в капиллярную систему, необходимо учитывать структурные преобразования в капиллярной щели.

Действие мощных УЗ полей позволяет в какой-то мере управлять эффектом динамического запирания.

Работа выполнена при частичном финансировании из грантов: государственной поддержки ведущих научных школ РФ (Грант НШ-7055.2006.1) "Многофазные течения с фазовыми превращениями" и по программе фундаментальных исследований ОЭММПУ РАН "Динамика и акустика неоднородных жидкостей газожидкостных систем и суспензий".

## Список литературы


[1] *А. Ахметов, А. Телин, В. Глухов, М. Мавлетов, М. Силин, Е. Гаевой, Р. Магадов, Д. Хлобыстов, Е. Байкова.* Особенности течения высококонцентрированных обратных водонефтяных эмульсий в трещинах и пористых средах. Технологии ТЭК. Нефть и капитал, апрель, 2003. С. 54–58.

[2] *А.Т. Ахметов, В.В. Глухов, М.В. Мавлетов.* Проблемы моделирования течения инвертных водонефтяных дисперсий в капиллярах // Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского. Т. 27 // Казанское математическое общество. Материалы XVII сессии Международной школы по моделям механики сплошной среды // Казань: Изд-во Казанского математического общества, 2004. 234 с. С. 30–41.

[3] *А. Ахметов, А. Телин, А. Корнилов.* Дисперсионные и реологические характеристики обратных водонефтяных эмульсий на основе нефтей приобского и мамонтовского месторождений. Научно-технический вестник. ЮКОС. №9. 2004. С. 43–50.

[4] *А. Телин, А. Ахметов, Г. Калимуллина.* Тестирование обратных водонефтяных эмульсий с анолитом и сеноманской водой в качестве блокирующих жидкостей для глушения скважин. Научно-технический вестник. ЮКОС. №10. 2004. С. 50–56.

[5] *Eiichiro Yamaguchi, Ronald J. Adrian* Theoretical and Experimental Study of Microchannel Blockage Phenomena // XXI International Congress of Theoretical and Applied Mechanics (ICTAM04). Abstracts and CD-ROM Proceedings. Published by IPPT PAN. Warsaw, Poland, August 15-21, 2004. 445 p. P. 31


## К ВОПРОСУ О ДВИЖЕНИИ КАПЕЛЬ С ЖИДКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ В НЕОДНОРОДНЫХ ВЯЗКИХ СРЕДАХ*


**С.Н. Дьяконов**

Орловский государственный университет, E-mail: s.dyakonov@univ-orel.ru



Поставлена осесимметричная задача о медленном прямолинейном движении сферической составной капли в неограниченной неоднородной по температуре и концентрациям компонентов бинарной газовой смеси. Умеренно крупная аэрозольная частица имеет жидкое шаровое ядро. Центральная часть составной капли неравномерно нагревается внутренними источниками тепла с интенсивностью, которая зависит от температуры по линейному закону. На внешней поверхности концентричной мембранной оболочки происходит фазовый переход первого рода одного из компонентов умеренно разреженной смеси газов. Рассматривается гидродинамический режим со скольжением в квазистационарном приближении при малых числах Рейнольдса и Пекле, когда гравитация и другие массовые силы отсутствуют. Термокапиллярные явления на межфазных границах раздела сред описываются с помощью квадратичной зависимости коэффициентов поверхностного натяжения от температуры. Производится учет пограничных температурных и концентрационных скачков, стефановских эффектов и тепла, связанного с конвективным переносом массы при диффузионном испарении летучей оболочки. Представлены расчетные формулы для различных динамических параметров, которые



*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-96411 р_цчр_а).

характеризуют термокапиллярный дрейф летучей составной капли как целого и перенос ядра.

**Введение.** Анализ движения совокупности капель в воздухе объясняет целый ряд метеорологических явлений. Проблема роста загрязненности атмосферы требует изучения переноса атмосферой механических, химических и радиоактивных частиц. Описание особенностей взаимодействия твердых частиц, капель или пузырей с окружающей средой лежит в основе расчета многих технологических процессов.

В химической технологии нередко применяются составные капли, когда внешняя среда (фаза 1) и жидкое ядро (фаза 3) разделены жидкой оболочкой из буферной или мембранной фазы (фаза 2). Пусть $R$ – внешний радиус составной капли, $R_* = R\varepsilon$ – радиус жидкого ядра, $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Стационарное движение в вязких несмешивающихся фазах 2 и 3 происходит по замкнутым линиям тока. Течение в мембранном слое с достаточно малой толщиной $R\big(1-\varepsilon\big)$ будет весьма стесненным и подавляет циркуляцию жидкости внутри ядра.

Развитие и совершенствование космической технологии нуждается в экспериментальном и теоретическом изучении термокапиллярной конвекции 1) в жидких кольцевых областях, которые имеют одну или две не связанные друг с другом свободные существенно криволинейные поверхности; 2) в составных каплях между границами раздела вязких несмешивающихся сред. Этот сравнительно мало исследованный класс течений обусловлен температурной зависимостью межфазного поверхностного натяжения, когда в условиях невесомости на граничных поверхностях наблюдаются перепады температуры.

**Постановка задачи. Уравнения и граничные условия.** Пусть в неподвижной неограниченной бинарной газовой смеси созданы и поддерживаются постоянными градиенты $\big(\mathbf{A}_T, \mathbf{A}_C\big)$ термодинамической температуры $T^{(1)}$ и относительной концентрации $C$ первого компонента. Величина $C$ представляет собой отношение числа $n_1$ молекул первого сорта к полному числу $\big(n_1 + n_2\big)$ газовых молекул в единице объема. Молекулы компонентов смеси имеют соответствующие массы $m_1$, $m_2$ и коэффициент взаимной диффузии $D_{12}$. В такую неоднородную газообразную среду помещается сферически изотропная составная капля [1] с тепловыделением внутри жидкого концентрического ядра шаровой формы. Тепловые источники распределены непрерывно с интенсивностью $q \equiv q(T)$ – количество тепла, которое выделяется или поглощается в единице объема ядра за единицу времени (например, в результате гомогенной неизотермической химической реакции нулевого порядка). Предположение о бесконечной протяженности газовой фазы будет оправдано, если ее характерные размеры много больше радиуса $R$ частицы. Заданные на бесконечности градиенты $\mathbf{A}_T \equiv \big(\nabla T^{(1)}\big)_\infty$ и $\mathbf{A}_C \equiv \big(\nabla C\big)_\infty$ суть коллинеарные векторы. На внешней поверхности капли наблюдается фазовый переход первого рода – молекулы химически чистого вещества жидкой оболочки испаряются (или конденсируются) при числах Маха много меньших единицы и образуют первую (летучую) компоненту умеренно разреженной газовой смеси: $L$, $n_{1\mathrm{s}}$, $C_\mathrm{s}$ – удельная теплота испарения, численная и относительная концентрации насыщенных паров летучего мембранного слоя. Для газовых молекул второго (несущего)

компонента внешняя поверхность оболочки непроницаема. Относительная концентрация газовых молекул первого сорта в окрестности частицы много меньше единицы. При условии $C \ll 1$ доминирует молекулярный механизм массопереноса в газообразной среде, а процесс испарения (или конденсации) называется диффузионным режимом [2, 3]. Число Кнудсена или отношение максимальной средней длины свободного пробега газовых молекул к внешнему радиусу частицы является исчезающе малым. Внутри двухфазной капли граница раздела оболочки и ядра непроницаема для жидкостей. Каждая среда считается изотропной, сплошной, несжимаемой и характеризуется коэффициентами $\varkappa^{(i)}$, $\chi^{(i)}$, $\eta^{(i)}$, $\nu^{(i)}$ удельной теплопроводности, температуропроводности, динамической и кинематической вязкости ($i = 1; 2; 3$).

Действие касательных напряжений на межфазных границах раздела за счет температурного изменения поверхностного натяжения (эффект Марангони), тепловое и диффузионное скольжения газа вдоль внешней поверхности капли, эффект летучести вызывают относительное движение составной капли в газообразной среде. Ее направленный перенос как целого относительно неподвижного наблюдателя характеризуется в любой момент времени $t$ вектором мгновенной скорости $\mathbf{U}_{\rm ph} \equiv \mathbf{U}_{\rm ph}(t)$. Целью работы является исследование особенностей динамики составной капли в квазистационарном приближении. Величина скорости $\mathbf{U}_{\rm ph}||\mathbf{A}_T||\mathbf{A}_C$ определяется в режиме со скольжением из условия, когда практически исчезает результирующее действие термокапиллярной $\mathbf{F}_\sigma$, термодиффузиофоретической $\mathbf{F}_{\rm TDph}$, реактивной $\mathbf{F}_{\rm r}$ сил и вязкого сопротивления $\mathbf{F}_{\rm v}$ газообразной среды: $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_\sigma + \mathbf{F}_{\rm TDph} + \mathbf{F}_{\rm r} + \mathbf{F}_{\rm v} = 0$.

Задача осесимметрична относительно некоторой оси $l$, которая имеет неподвижную точку отсчета, проходит через центр масс жидкого ядра капли и ориентирована в направлении вектора $\mathbf{U}_{\rm ph}$. Относительные изменения температуры и концентрации компонентов газовой смеси предполагаются малыми. Поэтому пренебрегаем температурной и концентрационной зависимостью коэффициентов молекулярного переноса. Они считаются постоянными величинами, например, коэффициенты $\varkappa_0^{(1)} \equiv \varkappa^{(1)}(p_0, T_0, C_0)$ или $\eta_0^{(1)} \equiv \eta^{(1)}(p_0, T_0, C_0)$ вычисляются при невозмущенных значениях давления $p_0$, температуры $T_0$ и относительной концентрации $C_0 = n_{10}/n_0$, где $n_0 = n_{10} + n_{20}$. Невозмущенные параметры фиксируются при отсутствии аэрозоля и соответствуют плоскости $l_0 = \text{const}$, в которой окажется геометрический центр ядра в начальный момент времени $t_0$. Теоретическая модель пренебрегает выделением тепла при диссипации энергии путем внутреннего трения. В момент времени $t$ центр ядра капли находится в некоторой плоскости $l = \text{const}$, а «невозмущенные» параметры $T_0^* \equiv T_0^*(t)$ и $C_0^* \equiv C_0^*(t)$ определяются тождествами

$$\begin{matrix} T_0^* \\ C_0^* \end{matrix} \equiv \begin{matrix} T_0 \\ C_0 \end{matrix} + \begin{matrix} \mathbf{A}_T \\ \mathbf{A}_C \end{matrix} \big(\mathbf{l} - \mathbf{l}_0\big) = \begin{matrix} T_0 \\ C_0 \end{matrix} + \begin{matrix} \mathbf{A}_T \\ \mathbf{A}_C \end{matrix} \int\limits_{t_0}^{t} \mathbf{U}_{\rm ph}(t')dt'.$$

Функции $T_0^*(t)$ и $C_0^*(t)$ растут (или убывают) со скоростями $\big(\mathbf{A}_T\mathbf{U}_{\rm ph}\big)$ и $\big(\mathbf{A}_C\mathbf{U}_{\rm ph}\big)$ соответственно от значений $T_0 \equiv T_0^*(0)$, $C_0 \equiv C_0^*(0)$ при $t_0 = 0$. В любой момент времени выполняются условия

$$\Big|\frac{A_T R}{T_0^*}\Big| \ll 1, \qquad \Big|\frac{A_C R}{C_0^*}\Big| \ll 1.$$

Скорость гомогенной химической реакции по активному компоненту равна количеству этого компонента, которое образуется или потребляется в единице объема за единицу времени. Чтобы прореагировать молекулы вещества преодолевают достаточно высокий энергетический барьер. Его высота для одной молекулы есть энергия активации $E$. Тепловой эффект неизотермической реакции в жидком ядре считается достаточно большим, что позволяет пренебречь зависимостью интенсивности внутреннего тепловыделения от концентрации реагента (реакция нулевого порядка). Скорость гомогенной реакции нулевого порядка пропорциональна вероятности накопления молекулой энергии $E$. Зависимость этой вероятности от абсолютной температуры $T$ существенно нелинейная. Объемная плотность тепловых источников описывается законом Аррениуса: $q(T) = q_0 \exp\big(-E/kT\big)$, где $q_0$ – предэкспоненциальный множитель характеризует мощность тепловыделения; $k$ – постоянная Больцмана. Температурные зависимости скоростей конкретных химических реакций приведены в книгах [4, 5]. Когда нелинейная функция $q(T)$ быстро возрастает с увеличением температуры, то при определенных граничных условиях будут невозможны квазистационарные распределения вне и внутри двухфазной капли. Например, за единицу времени внутри ядра выделяется слишком много тепловой энергии, а оболочка капли является низкотеплопроводной с хорошими теплоизолирующими свойствами и теплоотвод через мембранный слой в окружающую среду оказывается недостаточным для установления равновесного теплового состояния. В результате возникает тепловой взрыв – быстрое нестационарное разогревание центральной части аэрозоля и самоускорение химической реакции. Поэтому для исследования условий существования квазистационарных объемных распределений рассматривается гомогенная реакция при сравнительно несущественном нагревании ядра вблизи абсолютной температуры $T_0^*$

$$\frac{T_0^*}{T} = 1 - \frac{T - T_0^*}{T_0^*} + ..., \qquad \frac{T - T_0^*}{T_0^*} \ll 1.$$

Такое допущение оправдывается для химической реакции с достаточно большой энергией активации, что устанавливает границы применимости теории. Пусть величина $q_0$ не зависит от температуры и является постоянной, а также выполняются условия

$$\alpha\,\frac{T - T_0^*}{T_0^*} \ll 1, \qquad \alpha \equiv \frac{E}{kT_0^*} \gg 1, \qquad \big|\mathbf{A}_T\big| \sim \Big|\frac{q_0 R}{\varkappa_0^{(3)}}\Big|.$$

С учетом $q(T_0^*) = q_0 \exp(-\alpha)$ экспоненциальное выражение для интенсивности внутреннего энерговыделения аппроксимируется линейной функцией температуры

$$q(T) \equiv q(T_0^*)\Big\{1 + \alpha\,\frac{T - T_0^*}{T_0^*}\Big\}.$$

Если $q_0 < 0$, то реакция экзотермическая, а при $q_0 > 0$ – эндотермическая. В предельном случае $\alpha \to 0$ скорость гомогенной химической реакции внутри ядра не зависит от температуры и равна $q_0 = \mathrm{const}$. Источники тепла отсутствуют при $q_0 \equiv 0$.

Решение проводится в правой системе сферических координат $\big(r, \theta, \varphi\big)$. Начало жестко связано с геометрическим центром шарового мембранного слоя, орт $\mathbf{e}_z$ полярной оси $z$ лежит на линии движения составной капли: $\mathbf{U}_{\mathrm{ph}}(t) \equiv U_{\mathrm{ph}}(t)\mathbf{e}_z$. В такой

подвижной системе отсчета ядро имеет неизвестную скорость $\mathbf{U}^*_{\rm ph}(t) \equiv U^*_{\rm ph}(t)\mathbf{e}_z$. Пренебрегаем медленным смещением центра масс ядра из начала координат за характерное время. Строится квазистационарное приближение – в объеме каждой фазы различные распределения изменяются во времени достаточно медленно и рассматриваются как установившиеся в любой момент: в системе «капля – внешняя среда» характерные промежутки времени $t_{\rm v}^{(i)}$, $t_T^{(i)}$, $t_D$ значительно больше соответствующих времен гидродинамической $\left(R^2/\nu_0^{(i)}\right)$, тепловой $\left(R^2/\chi_0^{(i)}\right)$ и концентрационной $\left(R^2/D_{12}\right)$ релаксации

$$\frac{R^2}{\nu_0^{(i)}} \ll t_{\rm v}^{(i)}, \qquad \frac{R^2}{\chi_0^{(i)}} \ll t_T^{(i)}, \qquad \frac{R^2}{D_{12}} \ll t_D.$$

Однако для анализа на основе стационарных объемных уравнений при малых числах Рейнольдса и Пекле (нестационарные, инерционные и конвективные члены опускаются: $\mathrm{Re}^{(i)} \ll 1$, $\mathrm{Pe}_T^{(i)} \ll 1$, $\mathrm{Pe}_D \ll 1$) необходимо одновременное выполнение более сильных требований

$$t_{\rm v}^{(i)} \gg \mathrm{Re}^{(i)} \frac{R^2}{\nu_0^{(i)}}, \qquad t_T^{(i)} \gg \mathrm{Pe}_T^{(i)} \frac{R^2}{\chi_0^{(i)}}, \qquad t_D \gg \mathrm{Pe}_D \frac{R^2}{D_{12}}.$$

Если квазистационарный режим движения составной капли наблюдается в реальных условиях, то ее центральная часть практически покоится относительно жидкой оболочки. В общем случае сферическое ядро и шаровой мембранный слой концентричными друг другу не будут. Тогда смещение ядра вычисляется при более строгом решении задачи, например, в правой системе ортогональных бисферических координат вращения. В данной теории скорость $\mathbf{U}^*_{\rm ph}(t)$ выступает как предварительно неизвестный корректирующий решение параметр. Особенности термодиффузиофореза составной капли, когда ее жидкое шаровое ядро проходит через геометрический центр внешней сферической поверхности, представляют интерес с точки зрения значимости влияния теплофизических свойств и размеров подвижной центральной части на перенос аэрозоля как целого в неограниченной неоднородной газовой смеси. Очевидно, что в предельном случае полученные результаты применяются для анализа влияния жестких стенок неподвижного жидкого сферического контейнера на термокапиллярный дрейф вязкого шара.

Векторные поля скоростей $\mathbf{v}^{(1)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{v}^{(2)}(\mathbf{r}) + \mathbf{U}_{\rm ph}$, $\mathbf{v}^{(3)}(\mathbf{r}) + \mathbf{U}^*_{\rm ph} + \mathbf{U}_{\rm ph}$ описывают абсолютное движение в соответствующих объемных фазах. Вследствие осевой симметрии скорость $\mathbf{v}^{(i)} = \left\{v_r^{(i)}, v_\theta^{(i)}\right\}$ является полярным вектором и скалярные распределения давления $p^{(i)}(\mathbf{r})$, температуры $T^{(i)}(\mathbf{r})$, относительной концентрации $C(\mathbf{r})$ от меридионального угла $\varphi$ не зависят.

Стационарные термодиффузионные поля и распределения скоростей в выбранной подвижной системе отсчета не достигаются, так как присутствуют зависимости $T_0^* \equiv T_0^*(t)$ и $C_0^* \equiv C_0^*(t)$ при $\mathbf{A}_T \neq 0$, $\mathbf{A}_C \neq 0$. Очевидно, что равномерное направленное движение составной капли наблюдается только при отсутствии летучести, когда линейным образом зависят от температуры коэффициенты поверхностного натяжения $\sigma_{12}$, $\sigma_{23}$ на непроницаемых границах раздела фаз 1 и 2, 2 и 3 соответственно (определяющие термокапиллярный эффект Марангони производные $\sigma'_{12} \equiv d\sigma_{12}/dT$,

$\sigma'_{23} \equiv d\sigma_{23}/dT$ на межфазных подвижных границах будут постоянными во времени величинами). Если же коэффициенты $\sigma_{12}$ и $\sigma_{23}$ представляют собой произвольные нелинейные функции температуры, то дрейф вязкой составной капли с постоянной скоростью не реализуется.

Температурная зависимость коэффициента поверхностного натяжения чистых жидкостей обычно считается линейной. Однако для водных растворов высокомолекулярных спиртов с низкой концентрацией (у таких плохо растворимых в воде спиртов молекулы содержат достаточно большое количество атомов углерода), некоторых бинарных металлических сплавов и нематических жидких кристаллов экспериментально установлено, что для указанного ряда жидкостей на границе с воздухом температурная зависимость поверхностного натяжения отличается от монотонной линейной, имеет четко выраженный минимум и приближенно аппроксимируется квадратичным законом [6–8].

На границах раздела сред локальные единичные характеристические векторы $\mathbf{n} \equiv \mathbf{e}_r$, $\mathbf{t} \equiv \mathbf{e}_\theta$ меридиональной плоскости и орт $\mathbf{e}_\varphi$ образуют правую тройку: $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta$ [1]. Линейный векторный дифференциальный оператор Гамильтона $\nabla$ применяет обозначения $\nabla_n \equiv \mathbf{n}\nabla = \partial/\partial r$, $\nabla_t \equiv \mathbf{t}\nabla = \partial/r\partial\theta$. Капиллярные явления описываются равновесной теорией межфазного поверхностного натяжения и каждый из коэффициентов $\sigma_{12} \equiv \sigma_{12}(T)$, $\sigma_{23} \equiv \sigma_{23}(T)$ зависит от температуры по квадратичному закону $\bigl(\sigma \equiv \sigma_{12}, \sigma_{23}\bigr)$:

$$\sigma(T) = \frac{1}{2}\,\alpha\bigl(T - T_*\bigr)^2 + \beta\bigl(T - T_*\bigr) + \sigma(T_*); \quad \alpha \equiv \alpha_{12}, \alpha_{23}; \quad \beta \equiv \beta_{12}, \beta_{23}.$$

Сферическая форма капли или пузыря в стоксовом потоке есть следствие безынерционности течения. Однако даже в случае преобладания инерционных сил над вязкими, когда число Рейнольдса не является малым, деформация капли не наблюдается, если капиллярные силы велики по сравнению с инерционными – число Вебера низкое. Поэтому при отсутствии гравитации и достаточно медленном движении составной капли изменение ее формы не рассматривается как эффект высшего порядка малости. Внешняя поверхность подвижной капли имеет фактически сферическую форму и жидкое ядро окажется практически шаровым, если плотность сил поверхностного натяжения на межфазных границах существенно превышает вязкие напряжения, которые происходят от неравномерности давления и стремятся деформировать поверхности раздела:

$$\frac{\sigma_{12}}{R} \gg \left|\frac{\eta_0^{(1)} U_{\rm ph}}{R}\right| \gg \rho_0^{(1)} U_{\rm ph}^2, \qquad \frac{\sigma_{23}}{R_*} \gg \left|\frac{\eta_0^{(2)} U_{\rm ph}}{R_*}\right| \gg \rho_0^{(2)} U_{\rm ph}^2.$$

Состояния $\bigl(\mathbf{v}^{(i)}, p^{(i)}, T^{(i)}, C\bigr)$ объемных фаз описываются в квазистационарном приближении на основе гидродинамического анализа при исчезающе малых числах Рейнольдса и Пекле (тепловом, диффузионном) осесимметричными линейными дифференциальными уравнениями несжимаемости, Стокса, Лапласа и Гельмгольца:

$$\operatorname{div} \mathbf{v}^{(i)} = 0, \qquad \eta_0^{(i)} \Delta \mathbf{v}^{(i)} = \nabla p^{(i)}, \qquad \Delta C = 0,$$

$$\Delta T^{(1)} = 0, \qquad \Delta T^{(2)} = 0, \qquad \varkappa_0^{(3)} \Delta T^{(3)} = -q_0 \exp(-\alpha)\bigl(1 + \alpha\,\frac{T^{(3)} - T_0^*}{T_0^*}\bigr).$$

Решения соответствующих уравнений ограничены в центре жидкого ядра

$$\mathbf{r} = 0: \qquad \left|T^{(3)}\right| \neq \infty, \qquad \left|\mathbf{v}^{(3)}\right| \neq \infty, \qquad \left|p^{(3)}\right| \neq \infty.$$

На бесконечности газовая смесь неподвижна в пространстве, давление постоянно, а термодиффузионные поля невозмущены

$$r \to \infty: \qquad \mathbf{v}^{(1)} = 0, \qquad p^{(1)} = p_0^{(1)}, \qquad T^{(1)} = T_0^* + A_T z, \qquad C = C_0^* + A_C z.$$

Действие на границе раздела сред вязких напряжений $\tau_{nn}^{(i)}$ и $\tau_{nt}^{(i)}$ рассматривается в системе отсчета, в которой эта граница покоится – сила равна потоку импульса только при неподвижной поверхности [9]

$$\tau_{nn}^{(i)}\{\mathbf{u}^{(i)}\} = \tau_{rr}^{(i)}\{\mathbf{u}^{(i)}\} \equiv -p^{(i)} + 2\eta_0^{(i)}\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r},$$

$$\tau_{nt}^{(i)}\{\mathbf{u}^{(i)}\} = \tau_{r\theta}^{(i)}\{\mathbf{u}^{(i)}\} \equiv \eta_0^{(i)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial \theta} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta^{(i)}}{r}\right)\right),$$

$$\rho^{(1)} = m_1 n_1 + m_2 n_2, \qquad C_{\rm s} \equiv C_{\rm s}\left[T^{(2)}(R,\theta)\right] = \frac{n_{1\rm s}\left[T^{(2)}(R,\theta)\right]}{n_1 + n_2},$$

$$\sigma_{12} \equiv \sigma_{12}\left[T^{(2)}(R,\theta)\right] = \left(\frac{1}{2}\,\alpha_{12}\left(T^{(2)} - T_*\right)^2 + \beta_{12}\left(T^{(2)} - T_*\right) + \sigma_{12}(T_*)\right)_{r=R},$$

$$\sigma_{23} \equiv \sigma_{23}\left[T^{(3)}(R_*,\theta)\right] = \left(\frac{1}{2}\,\alpha_{23}\left(T^{(3)} - T_*\right)^2 + \beta_{23}\left(T^{(3)} - T_*\right) + \sigma_{23}(T_*)\right)_{r=R_*}.$$

На внешней поверхности $r = R$ составной капли: 1) непрерывен нормальный поток молекул пара летучего вещества, который отводится от мембранной оболочки через слой Кнудсена; 2) нормальный поток газовых молекул второго сорта обращается в нуль; 3) скачки температуры и концентрации обусловлены локальными нормальными к границе раздела градиентами $\mathbf{n}\nabla T^{(1)} \equiv \nabla_n T^{(1)}$, $\mathbf{n}\nabla C \equiv \nabla_n C$ термодиффузионных величин в тонком кнудсеновском слое с толщиной порядка средней длины свободного пробега газовых молекул; 4) выполняется баланс тепловой энергии с учетом фазового перехода первого рода, когда разность нормальных потоков тепла вне и внутри мембранной оболочки противоположна по знаку нормальному потоку массы летучего компонента газовой смеси; 5) разность касательных составляющих скоростей газовой среды и жидкой фазы равна сумме скоростей теплового и диффузионного скольжений, пропорциональных локальным тангенциальным к границе раздела градиентам $\mathbf{t}\nabla T^{(1)} \equiv \nabla_t T^{(1)}$ и $\mathbf{t}\nabla C \equiv \nabla_t C$ соответственно; 6) тангенциальные вязкие напряжения, с которыми газовая среда и жидкая оболочка действуют друг на друга, сбалансированы касательными капиллярными силами, обусловленными температурным изменением межфазного поверхностного натяжения

$$\mathbf{n}\left(n^{(2)}\mathbf{v}^{(2)}\right) = \mathbf{n}\left(n_1\left(\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{U}_{\rm ph}\right) - \frac{\left(n_1 + n_2\right)^2 m_2}{\rho^{(1)}}\,D_{12}\left(\nabla C + \frac{K_{\rm TD}}{T^{(1)}}\,\nabla T^{(1)}\right)\right),$$

$$\mathbf{n}\left(n_2\left(\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{U}_{\rm ph}\right) + \frac{\left(n_1 + n_2\right)^2 m_1}{\rho^{(1)}}\,D_{12}\left(\nabla C + \frac{K_{\rm TD}}{T^{(1)}}\,\nabla T^{(1)}\right)\right) = 0,$$

$$C = C_{\rm s}\big(T^{(2)}\big) + \mathbf{n}\big(V_{CC}\nabla C + \frac{V_{CT}}{T^{(2)}}\,\nabla T^{(1)}\big), \qquad T^{(1)} = T^{(2)} + \mathbf{n}\big(V_{TT}\nabla T^{(1)} + V_{TC}T^{(2)}\nabla C\big),$$

$$\mathbf{n}\big(-\varkappa_0^{(1)}\nabla T^{(1)} + \varkappa_0^{(2)}\nabla T^{(2)}\big) =$$

$$= -Lm_1\mathbf{n}\Big(n_1\big(\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{U}_{\rm ph}\big) - \frac{\big(n_1+n_2\big)^2 m_2}{\rho^{(1)}}\,D_{12}\big(\nabla C + \frac{K_{\rm TD}}{T^{(1)}}\,\nabla T^{(1)}\big)\Big),$$

$$\mathbf{t}\big(\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{U}_{\rm ph}\big) = \mathbf{t}\big(\mathbf{v}^{(2)} + K_{\rm Tsl}\frac{\eta^{(1)}}{\rho^{(1)}T^{(1)}}\nabla T^{(1)} + K_{\rm Dsl}D_{12}\nabla C\big),$$

$$\tau_{nt}^{(1)}\big\{\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{U}_{\rm ph}\big\} - \tau_{nt}^{(2)}\big\{\mathbf{v}^{(2)}\big\} + \nabla_t\,\sigma_{12} = 0.$$

На межфазной границе раздела $r = R_*$ двух несмешивающихся жидкостей внутри составной капли: 1) температура, плотность нормального потока тепла и касательная составляющая вектора скорости непрерывны; 2) нормальная компонента вектора скорости обращается в нуль; 3) выполняется баланс для касательных компонент тензора напряжений

$$T^{(2)} = T^{(3)}, \qquad \mathbf{n}\big(-\varkappa_0^{(2)}\nabla T^{(2)} + \varkappa_0^{(3)}\nabla T^{(3)}\big) = 0,$$

$$\mathbf{n}\big(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{U}^*_{\rm ph}\big) = \mathbf{n}\mathbf{v}^{(3)} = 0, \qquad \mathbf{t}\big(\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{U}^*_{\rm ph}\big) = \mathbf{t}\mathbf{v}^{(3)},$$

$$\tau_{nt}^{(2)}\big\{\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{U}^*_{\rm ph}\big\} - \tau_{nt}^{(3)}\big\{\mathbf{v}^{(3)}\big\} + \nabla_t\,\sigma_{23} = 0.$$

При отсутствии гравитации и других массовых сил интегральные действия на внешнюю поверхность составной капли (со стороны газовой среды) и на граничную поверхность шарового ядра (со стороны жидкой оболочки) равны нулю в любой момент времени для квазистационарного приближения: $\mathbf{F} \equiv 0$, $\mathbf{F}^* \equiv 0$. Отсюда определяются мгновенные скорости $\mathbf{U}_{\rm ph}$, $\mathbf{U}^*_{\rm ph}$ термокапиллярного дрейфа составной капли как целого (относительно неподвижного наблюдателя) и вязкого шарового ядра (относительно подвижной системы сферических координат).

Если в условиях задачи одновременно присутствуют поле тяготения и вертикальный градиент температуры, то эффекты Марангони приводят к изменению скорости гравитационного осаждения двухфазной частицы.

Так как $\mathbf{U}_{\rm ph} || \mathbf{U}^*_{\rm ph} || \mathbf{e}_z$, $\mathbf{e}_r\mathbf{e}_z = \cos\theta$, $\mathbf{e}_\theta\mathbf{e}_z = -\sin\theta$, то в граничных условиях для напряжений слагаемые со скоростями $\mathbf{U}_{\rm ph}$, $\mathbf{U}^*_{\rm ph}$ выпадают:

$$\tau_{nn}^{(1)}\big\{\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{U}_{\rm ph}\big\} \equiv \tau_{nn}^{(1)}\big\{\mathbf{v}^{(1)}\big\}, \qquad \tau_{nt}^{(1)}\big\{\mathbf{v}^{(1)} - \mathbf{U}_{\rm ph}\big\} \equiv \tau_{nt}^{(1)}\big\{\mathbf{v}^{(1)}\big\},$$

$$\tau_{nn}^{(2)}\big\{\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{U}^*_{\rm ph}\big\} \equiv \tau_{nn}^{(2)}\big\{\mathbf{v}^{(2)}\big\}, \qquad \tau_{nt}^{(2)}\big\{\mathbf{v}^{(2)} - \mathbf{U}^*_{\rm ph}\big\} \equiv \tau_{nt}^{(2)}\big\{\mathbf{v}^{(2)}\big\}.$$

Аэрозоль окружает тонкий кнудсеновский слой парогазовой среды с толщиной порядка средней длины свободного пробега газовых молекул, в котором объемные уравнения газодинамики и тепломассопереноса не справедливы. Температурный (концентрационный) скачок равен разности между температурой (концентрацией) «на внешней поверхности капли» для газодинамической области (значение физической величины получается в результате интерполирования объемного распределения вне слоя Кнудсена вплоть до межфазной границы раздела) и истинной температурой (концентрацией) на внешней поверхности капли. Коэффициенты $V_{TT}$, $V_{TC}$, $V_{CC}$ , $V_{CT}$ пограничных скачков определяются математическими методами кинетической теории газов из

решения системы уравнений Больцмана. Они имеют величину порядка средней длины свободного пробега газовых молекул, выражаются через коэффициент испарения (конденсации) и позволяют оценить влияние кнудсеновского слоя на векторные поля $\mathbf{v}^{(i)}(\mathbf{r})$, скалярные распределения $p^{(i)}(\mathbf{r})$, $T^{(i)}(\mathbf{r})$, $C(\mathbf{r})$, скорость $\mathbf{U}_{\rm ph}$ термодиффузиофореза. Влияние оказывается весьма существенным даже для крупного аэрозоля при условии $\varkappa^{(1)}/\varkappa^{(2)} \approx {\rm Kn}$. Аналитический вид и методика вычисления газокинетических коэффициентов $V_{TT}$, $V_{TC}$, $V_{CC}$ , $V_{CT}$, $K_{\rm Tsl}$, $K_{\rm Dsl}$ представлены для бинарной смеси газов с произвольными отношениями масс молекул и концентрациями компонентов в книгах [10, 11]. При малых числах Кнудсена эффект изотермического скольжения не рассматривается, так как дает поправки порядка ${\rm Kn}U_{\rm ph}$.

В данной задаче насыщенный пар химически чистого вещества испаряющейся оболочки находится далеко от критического состояния и считается идеальным газом. Парциальное давление $p_{1\rm s}(T)$ насыщенных паров при абсолютной температуре $T$ около поверхности с малой кривизной не отличается от давления пара с такой же температурой вблизи плоской летучей поверхности. Тогда для динамического равновесия жидкой и газообразной фазы вещества незаряженной оболочки приближенный интеграл Клапейрона-Клаузиуса имеет вид

$$p_{1\rm s}(T) = n_{1\rm s}(T)kT = p_{1\rm s}(T_{\rm w})\exp\Big(\frac{Lm_1}{kT_{\rm w}}\big(1-\frac{T_{\rm w}}{T}\big)\Big).$$

Здесь $T_{\rm w}$ – температура на внешней летучей поверхности неподвижной составной капли, когда в шаровом ядре удельная мощность тепловых источников зависит от температуры по указанному выше линейному закону, а на бесконечности смесь газов равномерно нагрета и однородна по концентрациям компонентов: $T_\infty = T_0^*$, $C_\infty = C_0^*$. При квазистационарном испарении мембранного слоя выделяющееся внутри ядра тепло расходуется на испарение вещества оболочки, а частично отводится от ее поверхности наружу за счет молекулярной и конвективной теплопроводности (влияние теплового излучения несущественно). Неизвестная температура $T_{\rm w} \neq T_0^*$ находится из интегрального уравнения закона сохранения тепловой энергии $Q = Q_T + Lm_1Q_1$, где $Q$ – суммарная мощность источников (стоков) тепла или количество тепловой энергии, выделяемой (поглощаемой) в ядре за единицу времени; $Q_T$, $Q_1$ – интегральные потоки тепла и газовых молекул первого сорта, которые отводятся через кнудсеновский слой от внешней поверхности оболочки с векторным дифференциальным элементом площади $d\mathbf{S} \equiv \mathbf{e}_r dS$

$$Q \equiv \int\limits_V\int\int q(T)dV = 4\pi q_0\exp(-\alpha)\int\limits_0^{R_*}\Big(1+\alpha\,\frac{T^{(3)}(r)-T_0^*}{T_0^*}\Big)r^2dr,$$

$$Q_T \equiv -\oint\limits_S \varkappa_0^{(1)}\big(\nabla T^{(1)}\big)_{r=R}\,d\mathbf{S} = -4\pi R^2\varkappa_0^{(1)}\Big(\frac{dT^{(1)}(r)}{dr}\Big)_{r=R},$$

$$Q_1 \equiv -\oint\limits_S \Big(\big(n_1+n_2\big)D_{12}\nabla C\Big)_{r=R}\,d\mathbf{S} = -4\pi R^2\Big(\big(n_1+n_2\big)D_{12}\frac{dC(r)}{dr}\Big)_{r=R}.$$

При малой неизотермичности составной капли для скорости температурного изменения относительной концентрации $C_{\rm s}(T)$ насыщенных паров летучего вещества мем-

бранного слоя при $T = T_{\rm w}$ получаем оценку

$$C'_{\rm s} \equiv T_{\rm w}\,\frac{\partial C_{\rm s}}{\partial T}\Big|_{T=T_{\rm w}} = C_{\rm s}(T_{\rm w})\Big(\frac{Lm_1}{kT_{\rm w}} - 1\Big),$$
$$C_{\rm s}(T_{\rm w}) = C_{\rm s}(T_0^*)\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}\,\Big(1 + \frac{Lm_1}{kT_0^*}\big(1 - \frac{T_0^*}{T_{\rm w}}\big)\Big), \qquad C_{\rm s}(T_0^*) = \frac{p_{1{\rm s}}(T_0^*)}{\big(n_{10}^* + n_{20}^*\big)kT_0^*}.$$

Термодиффузионная задача решается независимо от гидродинамической, а эффекты теплового и диффузионного скольжений газовой среды считаются исчезающе малыми по сравнению с термокапиллярными. Тогда интегральные по граничной поверхности действия термокапиллярных сил $\big\{\mathbf{F}_\sigma, \mathbf{F}_\sigma^*\big\}$, вязких сопротивлений $\big\{\mathbf{F}_{\rm v}, \mathbf{F}_{\rm v}^*\big\}$ на составную каплю как целое (со стороны фазы 1) и жидкое ядро (со стороны фазы 2) имеют размерные квазистационарные представления

$$\mathbf{F}_\sigma \equiv -\frac{4\pi}{3}\Big\{\Omega_{11}\big(E_1^{(2)} + F_1^{(2)}\big)\Big(\alpha_{12}\big(T_0^* - T_*\big) + \beta_{12}\Big) - \\ - 2\Omega_{12}\varepsilon^2 E_1^{(3)}\Big(\alpha_{23}\big(T_0^* - T_*\big) + \beta_{23}\Big)\Big\}\frac{1-\varepsilon}{\Omega}\,\mathbf{A}_T R^2,$$

$$\mathbf{F}_{\rm v} \equiv 4\pi\eta_0^{(1)} R\Big\{\Omega_{13}\eta_2\varepsilon\mathbf{U}_{\rm ph}^* - \Omega_{14}\big(1-\varepsilon\big)\mathbf{U}_{\rm ph}\Big\}\frac{1}{\Omega\big(1-\varepsilon\big)},$$

$$\mathbf{F}_\sigma^* \equiv -\frac{8\pi}{3}\Big\{\Omega_{21}\big(E_1^{(2)} + F_1^{(2)}\big)\Big(\alpha_{12}\big(T_0^* - T_*\big) + \beta_{12}\Big) + \\ + \Omega_{22}\varepsilon E_1^{(3)}\Big(\alpha_{23}\big(T_0^* - T_*\big) + \beta_{23}\Big)\Big\}\frac{\eta_2\varepsilon}{\Omega\big(1-\varepsilon\big)}\,\mathbf{A}_T R^2,$$

$$\mathbf{F}_{\rm v}^* \equiv -4\pi\eta_0^{(2)} R\Big\{2\Omega_{23}\mathbf{U}_{\rm ph}^* - \Omega_{24}\big(1-\varepsilon\big)\mathbf{U}_{\rm ph}\Big\}\frac{\varepsilon}{\Omega\big(1-\varepsilon\big)^2}.$$

Здесь и далее фигурируют обозначения $\eta_2 \equiv \eta_0^{(2)}/\eta_0^{(1)}$, $\eta_3 \equiv \eta_0^{(3)}/\eta_0^{(1)}$,

$$\Omega \equiv \eta_3\big(4 + 7\varepsilon + 4\varepsilon^2\big)\big(1-\varepsilon\big)^2 + \\ + 4\eta_2^2\big(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4\big) + 2\eta_2\big(1+\eta_3\big)\big(2 + \varepsilon + 2\varepsilon^2\big)\big(1-\varepsilon^2\big),$$

$$\Omega_{11} \equiv 2\eta_2\big(2 + \varepsilon + 2\varepsilon^2\big)\big(1+\varepsilon\big) + \eta_3\big(4 + 7\varepsilon + 4\varepsilon^2\big)\big(1-\varepsilon\big),$$
$$\Omega_{12} \equiv \eta_2\big(1 + 3\varepsilon + \varepsilon^2\big),$$
$$\Omega_{13} \equiv 2\eta_2\big(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4\big) + \eta_3\big(3 + 6\varepsilon + 4\varepsilon^2 + 2\varepsilon^3\big)\big(1-\varepsilon\big),$$

$$\Omega_{14} \equiv \eta_3\big(4 + 7\varepsilon + 4\varepsilon^2\big)\big(1-\varepsilon\big)^2 + \\ + 6\eta_2^2\big(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4\big) + \eta_2\big(2 + 3\eta_3\big)\big(2 + \varepsilon + 2\varepsilon^2\big)\big(1-\varepsilon^2\big),$$

$$\Omega_{21} \equiv \Omega_{24} \equiv \Omega_{13},$$
$$\Omega_{22} \equiv \big(2 + 4\varepsilon + 6\varepsilon^2 + 3\varepsilon^3\big)\big(1-\varepsilon\big) + 2\eta_2\big(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \varepsilon^4\big),$$
$$\Omega_{23} \equiv \eta_2\big(2 + 3\varepsilon^5\big) + 3\eta_3\big(1 - \varepsilon^5\big) + \eta_2\Big(2\eta_2\big(1 - \varepsilon^5\big) + \eta_3\big(3 + 2\varepsilon^5\big)\Big),$$

$$h^2 \equiv \alpha\,\frac{q(T_0^*)R^2}{\varkappa_0^{(3)}T_0^*} = \alpha\exp(-\alpha)\,\frac{q_0R^2}{\varkappa_0^{(3)}T_0^*}, \qquad \gamma \equiv \frac{Lm_1\bigl(n_{10}^*+n_{20}^*\bigr)^2D_{12}}{\varkappa_0^{(1)}n_{20}^*T_0^*}.$$

Безразмерные постоянные $E_1^{(2)}$, $F_1^{(2)}$, $E_1^{(3)}$ вычисляются при $\alpha \gg 1$, $q_0 \geqslant 0$ посредством соотношений

$$\frac{A_TR}{T_{\rm w}}\bigl(E_1^{(2)}+F_1^{(2)}\bigr) = \bigl(1-k_{TT}\bigr)\frac{A_TR}{T_{\rm w}} - k_{TC}A_CR + \\ + \bigl(1+2k_{TT}\bigr)\frac{A_TR}{T_{\rm w}}\,F_1^{(1)} + 2k_{TC}A_CRL_1^{(1)},$$

$$\delta_1E_1^{(2)} = F_1^{(2)}, \qquad \frac{q_0R}{\varkappa_0^{(3)}}\,\varepsilon\sqrt{\varepsilon}\,J_{\frac{3}{2}}(h\varepsilon)\,E_1^{(3)} = A_T\bigl(\varepsilon^3E_1^{(2)}+F_1^{(2)}\bigr),$$

$$A_CR\bigl(1+L_1^{(1)}\bigr) = \frac{3}{\triangle_1}\Bigl(\triangle_C^{'}\,A_CR + \triangle_T^{'}\,\frac{A_TR}{T_{\rm w}}\Bigr),$$

$$\frac{A_TR}{T_{\rm w}}\,\bigl(1+F_1^{(1)}\bigr) = \frac{3}{\triangle_1}\Bigl(\triangle_C^{''}\,A_CR + \triangle_T^{''}\,\frac{A_TR}{T_{\rm w}}\Bigr),$$

$$\triangle_1 = \bigl(1+2k_{CC}-2k_{TC}\,C_{\rm s}'\bigr)\Bigl(2\bigl(1+K_{\rm TD}\gamma\,\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}\bigr)+\lambda_1\bigl(1+2k_{TT}\bigr)\Bigr) + \\ + 2\Bigl(\bigl(1+2k_{TT}\bigr)C_{\rm s}'-2k_{CT}\Bigr)\bigl(\gamma\,\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}+\lambda_1k_{TC}\bigr),$$

$$\triangle_C^{'} = \bigl(k_{CC}-k_{TC}\,C_{\rm s}'\bigr)\Bigl(2\bigl(1+K_{\rm TD}\gamma\,\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}\bigr)+\lambda_1\bigl(1+2k_{TT}\bigr)\Bigr) + \\ + \Bigl(\bigl(1+2k_{TT}\bigr)C_{\rm s}'-2k_{CT}\Bigr)\bigl(\gamma\,\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}+\lambda_1k_{TC}\bigr),$$

$$\triangle_T^{'} = \bigl(1+K_{\rm TD}\gamma\,\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}\bigr)C_{\rm s}'+\lambda_1k_{CT},$$

$$\triangle_C^{''} = \gamma\,\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}+\lambda_1k_{TC},$$

$$\triangle_T^{''} = \bigl(1+2k_{CC}-2k_{TC}\,C_{\rm s}'\bigr)\bigl(1+K_{\rm TD}\gamma\,\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}+\lambda_1k_{TT}\bigr) + \\ + 2\bigl(k_{TT}\,C_{\rm s}'-k_{CT}\bigr)\bigl(\gamma\,\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}+\lambda_1k_{TC}\bigr).$$

Величины $\delta_n \equiv \delta_n(x)$, $\lambda_n \equiv \lambda_n(x)$ для значений $n = 0$ и $n = 1$

$$\delta_n(x) \equiv -\frac{\Bigl(n+1+n\,\dfrac{\varkappa_0^{(2)}}{\varkappa_0^{(3)}}\Bigr)J_{n+\frac{1}{2}}(x)-xJ_{n-\frac{1}{2}}(x)}{\bigl(n+1\bigr)\Bigl(1-\dfrac{\varkappa_0^{(2)}}{\varkappa_0^{(3)}}\Bigr)J_{n+\frac{1}{2}}(x)-xJ_{n-\frac{1}{2}}(x)}\,\varepsilon^{2n+1},$$

$$\lambda_n(x) \equiv \Bigl\{n-\bigl(2n+1\bigr)\,\frac{\delta_n(x)}{1+\delta_n(x)}\Bigr\}\,\frac{\varkappa_0^{(2)}}{\varkappa_0^{(1)}}$$

выражаются через функции Бесселя первого рода полуцелого порядка с аргументом $x \equiv h\varepsilon > 0$, удовлетворяющие рекуррентным свойствам [12]

$$xJ_{m+1}(x) = 2mJ_m(x) - xJ_{m-1}(x) = mJ_m(x) - x\frac{dJ_m(x)}{dx},$$
$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\sin x, \qquad J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\cos x.$$

Закон сохранения тепловой энергии $Q = Q_T + Lm_1Q_1$ записывается в виде трансцендентного уравнения относительно $T_0^*/T_{\rm w}$

$$\Big(\frac{T_0^*}{T_{\rm w}} - 1\Big)\Big(1 + k_{CC} + \Big(\big(1+k_{CC}\big)K_{\rm TD} - k_{CT}\Big)\gamma\,\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}\Big) =$$
$$= \frac{\lambda_0}{\alpha}\Big(\alpha + \big(1-\alpha\big)\frac{T_0^*}{T_{\rm w}}\Big)\Big(\big(1+k_{TT}\big)\big(1+k_{CC}\big) + k_{TC}k_{CT}\Big) +$$
$$+ \Big(\big(1 + k_{TT} + k_{TC}K_{\rm TD}\big)\gamma\,\frac{T_0^*}{T_{\rm w}} + k_{TC}\Big)\big(C_{\rm s}(T_{\rm w}) - C_0^*\big).$$

Условия $\mathbf{F}^* \equiv \mathbf{F}_\sigma^* + \mathbf{F}_{\rm v}^* = 0$, $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_\sigma + \mathbf{F}_{\rm v} = 0$ равномерного движения ядра и составной капли как целого дают формулы для скоростей $\mathbf{U}_{\rm ph}^*$, $\mathbf{U}_{\rm ph}$

$$\mathbf{U}_{\rm ph}^* = -\frac{1}{3}\,\big(1-\varepsilon\big)\frac{f^*}{2\Omega_{14}\Omega_{23} - \Omega_{13}^2\eta_2\varepsilon}\,\frac{\mathbf{A}_T R}{\eta_0^{(1)}},$$
$$f^* = 3\Omega_{13}\Omega\big(E_1^{(2)} + F_1^{(2)}\big)\Big(\alpha_{12}\big(T_0^* - T_*\big) + \beta_{12}\Big) +$$
$$+ 2\Big(\Omega_{14}\Omega_{22} - \Omega_{12}\Omega_{24}\big(1-\varepsilon\big)\varepsilon\Big)\varepsilon E_1^{(3)}\Big(\alpha_{23}\big(T_0^* - T_*\big) + \beta_{23}\Big),$$

$$\mathbf{U}_{\rm ph} = -\frac{2}{3}\,\frac{f}{2\Omega_{14}\Omega_{23} - \Omega_{13}^2\eta_2\varepsilon}\,\frac{\mathbf{A}_T R}{\eta_0^{(1)}},$$
$$f = \Big(\Omega_{13}^2\eta_2\varepsilon + \Omega_{11}\Omega_{23}\big(1-\varepsilon\big)\Big)\big(E_1^{(2)} + F_1^{(2)}\big)\Big(\alpha_{12}\big(T_0^* - T_*\big) + \beta_{12}\Big) +$$
$$+ \Big(\Omega_{13}\Omega_{22}\eta_2 - 2\Omega_{12}\Omega_{23}\big(1-\varepsilon\big)\Big)\varepsilon^2 E_1^{(3)}\Big(\alpha_{23}\big(T_0^* - T_*\big) + \beta_{23}\Big).$$

Если в задаче перемещение жидкого ядра не рассматривается, то при $\mathbf{U}_{\rm ph}^* \equiv 0$, $\mathbf{F}^* \neq 0$ из условия $\mathbf{F} = 0$ следует выражение

$$\mathbf{U}_{\rm ph} \equiv -\frac{1}{3}\left\{\frac{\Omega_{11}}{\Omega_{14}}\,\big(E_1^{(2)} + F_1^{(2)}\big)\Big(\alpha_{12}\big(T_0^* - T_*\big) + \beta_{12}\Big) -\right.$$
$$\left. - 2\,\frac{\Omega_{12}}{\Omega_{14}}\,\varepsilon^2 E_1^{(3)}\Big(\alpha_{23}\big(T_0^* - T_*\big) + \beta_{23}\Big)\right\}\big(1-\varepsilon\big)\frac{\mathbf{A}_T R}{\eta_0^{(1)}}.$$

Полученные результаты представляют интерес в инженерной практике, энергетике, химической и космической технологии, в метеорологии при описании различных природных явлений и т.д.

## Список литературы


[1] *J. Happel, H. Brenner.* Low Reynolds number hydrodynamics. Prentice—Hall, 1965. Русский перевод: *Дж. Хаппель, Г. Бреннер.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. Перевод с англ. Бермана В.С. и Маркова В.Г. Под ред. Буевича Ю.А. М.: Мир, 1976. 632 с.

[2] *Н.А. Фукс* Испарение и рост капель в газообразной среде. М.: Изд.-во АН СССР, 1958.

[3] *Ю.И. Яламов, А.И. Сидоров, И.А. Силин, Е.Р. Щукин, М.Ф. Баринова.* Об испарении в диффузионном режиме двух взаимодействующих крупных капель под действием внутренних источников тепла. // Инж.-физ. журн. 1980. Т. 39. № 1. С. 150.

[4] *П.В. Данквертс.* Газожидкостные реакции. Пер. с англ. М.: Химия, 1973. 296 с.

[5] *Д.А. Франк—Каменецкий.* Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1987. 502 с.

[6] *R. Vochten, G. Petre, R. Defay.* Study of the heat of reversible adsorption at the air-solution interface. I; Thermodynamical calculation of the heat of reversible adsorption of nonionic surfactants // J. Colloid Interface Sci. 1973. V. 42. № 2. P. 310–319.

[7] *R. Vochten, G. Petre.* Study of the heat of reversible adsorption at the air-solution interface. II; Experimental Determination of the heat of reversible adsorption of some alcohols // J. Colloid Interface Sci. 1973. V. 42. № 2. P. 320–327.

[8] *J.C. Legros, M.C. Limbourg, G. Petre.* Influence of a surface tension minimum as a function of temperature on the Marangoni convection // Acta Astronautica. 1984. V. 11. №. 2. P. 143–147.

[9] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц* Теоретическая физика. В 10 т. Т. 6. Гидродинамика. 4-е изд., стер. М.: Наука, 1988. 736 с.

[10] *Ю.И. Яламов, В.С. Галоян.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.

[11] *Е.И. Алехин, Ю.И. Яламов.* Математические основы решения граничных задач кинетической теории многокомпонентных газов вблизи конденсированной фазы. Учебное пособие к спецкурсу. М.: Изд-во МОПИ им. Н.К. Крупской, 1991. 150 с.

[12] *Г. Корн, Т. Корн.* Mathematical handbook for scientists and engineers. Русский перевод: Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. со второго американского перераб. изд. под общей ред. Арамановича И.Г. 5-е изд. М.: Наука, 1984. 831 с.


## К ОБЩЕМУ РЕШЕНИЮ ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ОЗЕЕНА*


**С.Н. Дьяконов**

Орловский государственный университет, E-mail: s.dyakonov@univ-orel.ru



Получены новые точные частные решения однородного уравнения Озеена. Они необходимы для физически полной и корректной процедуры сращивания асимптотических разложений различных полей во внешней и внутренней областях (например, при оценке влияния



*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-96411 р_цчр_а).

инерционных и конвективных эффектов на динамику частиц в неоднородных вязких средах).

Классическая задача о прямолинейном и равномерном самодвижении с неизвестной скоростью $\mathbf{U}_{\rm ph}$ жесткого тела в неограниченной вязкой среде вполне эквивалентна гидродинамической задаче об обтекании неподвижного тела равномерным потоком, который имеет на бесконечности скорость $\mathbf{U} = -\mathbf{U}_{\rm ph}$. Рассмотрим медленное стационарное осесимметричное обтекание неподвижного идеального шара. Плотность $\rho_0$, коэффициент динамической вязкости $\eta_0$ внешней среды считаются постоянными величинами, невозмущенное давление есть $p_0 = \mathrm{const}$. Геометрический центр тела с радиусом $R$ совпадает с началом сферической системы координат $(r, \theta, \varphi)$ и орты $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi)$ образуют правую тройку: $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_\theta$. Поступательный поток со скоростью $U$ набегает в направлении положительных значений оси $z$. В разложении искомой скорости $U$ по малым числам Рейнольдса $\varepsilon$ нулевое приближение равно $U_0 > 0$. Конечные числа $\varepsilon \ll 1$ определяются в свою очередь через значения $U_0$ и $R$. Точка наблюдения $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ удалена от оси симметрии течения на расстояние $\gamma = r\sqrt{1-\xi^2}$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $\quad z = r\xi, \quad \xi = \cos\theta$.

В вязкой несжимаемой жидкости векторное поле скорости $\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}(\mathbf{r})$, функция тока $\psi \equiv \psi(\mathbf{r})$, скалярное распределение давления $p \equiv p(\mathbf{r})$ удовлетворяют следующим дифференциальным уравнениям и условиям на бесконечности [1, 2]

$$r > R: \qquad -\frac{\rho_0}{r^2}\left\{\frac{\partial\big(\psi, \mathrm{E}_r^2\psi\big)}{\partial\big(r,\xi\big)} + 2\big(\mathrm{E}_r^2\psi\big)\big(\mathrm{L}_r\psi\big)\right\} = \eta_0 \mathrm{E}_r^4\psi,$$

$$r > R: \qquad \nabla p = \left\{\frac{\eta_0}{\gamma}\,\mathbf{e}_\varphi\right\} \times \nabla\big(\mathrm{E}_r^2\psi\big) - \rho_0\left\{\frac{1}{2}\,\big(\nabla v^2\big) - \frac{1}{\gamma^2}\,\big(\mathrm{E}_r^2\psi\big)\big(\nabla\psi\big)\right\},$$

$$r \to \infty: \qquad \mathbf{v} \to \mathbf{v}_\infty = U\mathbf{e}_z, \qquad p = p_0.$$

Здесь $\mathrm{E}_r^4\psi \equiv \mathrm{E}_r^2\big(\mathrm{E}_r^2\psi\big)$; осесимметричные линейные операторы $\mathrm{E}_r^2$, $\mathrm{L}_r$, $\nabla$ имеют в сферической системе координат следующие структуры

$$\mathrm{E}_r^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1-\xi^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}, \quad \mathrm{L}_r \equiv \frac{\xi}{1-\xi^2}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\xi}, \quad \nabla \equiv \mathbf{e}_r\frac{\partial}{\partial r} - \mathbf{e}_\theta\sqrt{1-\xi^2}\,\frac{\partial}{\partial\xi}.$$

Далее после перехода к безразмерным физическим величинам

$$r = R\tilde{r}, \qquad \mathbf{v} = U_0\tilde{\mathbf{v}}, \qquad \psi = U_0R^2\tilde{\psi}, \qquad p = \frac{\eta_0U_0}{R}\,\tilde{p} + p_0$$

волнистую линию сверху опускаем и в переменных Стокса $(r, \psi, p, \mathbf{v})$ имеем

$$r > 1: \qquad \mathrm{E}_r^4\psi = -\frac{\varepsilon}{r^2}\left\{\frac{\partial\big(\psi, \mathrm{E}_r^2\psi\big)}{\partial\big(r,\xi\big)} + 2\big(\mathrm{E}_r^2\psi\big)\big(\mathrm{L}_r\psi\big)\right\};$$

$$r > 1: \qquad \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial\big(\mathrm{E}_r^2\psi\big)}{\partial\xi} - \frac{\varepsilon}{r^2}\left\{r^2\Big(v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r}\Big) - \frac{\mathrm{E}_r^2\psi}{1-\xi^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial r}\right\};$$

$$r > 1: \qquad \frac{\partial p}{\partial \xi} = -\frac{1}{1-\xi^2}\,\frac{\partial\big(\mathrm{E}_r^2\psi\big)}{\partial r} - \frac{\varepsilon}{r^2}\left\{r^2\Big(v_r\frac{\partial v_r}{\partial \xi} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial \xi}\Big) - \frac{\mathrm{E}_r^2\psi}{1-\xi^2}\,\frac{\partial\psi}{\partial \xi}\right\};$$

$$r \to \infty: \qquad \mathbf{v} \to \mathbf{v}_\infty = U\mathbf{e}_z, \qquad p = 0.$$

В области неоднородности $\varepsilon r \geqslant 1$ главные и нелинейные члены объемных гидродинамических уравнений уже одинаковы по порядку величины. Так как в промежуточной области инерционные явления играют существенную роль, то вводятся новые переменные Озеена $(\rho, \Psi, P, \mathbf{V})$ согласно равенствам $\mathbf{v} = \mathbf{V}, \quad \nabla p = \nabla_{(\rho)} P$. Здесь и далее осесимметричные операторы $\nabla_{(\rho)}$, $\mathrm{E}^2_\rho$, $\mathrm{L}_\rho$ записываются в координатах $(\rho, \xi)$ и получаются соответственно из операторов $\nabla$, $\mathrm{E}^2_r$, $\mathrm{L}_r$ путем замены $r \to \rho$. Тогда в результате преобразования радиальной координаты, изменения масштаба функции тока и давления

$$\rho = \varepsilon r, \qquad \Psi = \varepsilon^2 \psi, \qquad P = \varepsilon p$$

исключается число Рейнольдса из нелинейного уравнения четвертого порядка для функции тока во внешней области $\big(\rho = \varepsilon r \geqslant 1\big)$

$$\mathrm{E}^4_\rho \Psi = -\frac{1}{\rho^2} \left\{ \frac{\partial\big(\Psi, \mathrm{E}^2_\rho \Psi\big)}{\partial\big(\rho, \xi\big)} + 2\big(\mathrm{E}^2_\rho \Psi\big)\big(\mathrm{L}_\rho \Psi\big) \right\}; \tag{1}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \rho} = \frac{\varepsilon^2}{\rho^2} \frac{\partial\big(\mathrm{E}^2_\rho \Psi\big)}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon^2}{\rho^2} \left\{ \rho^2 \Big( V_\rho \frac{\partial V_\rho}{\partial \rho} + V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \rho} \Big) - \frac{\mathrm{E}^2_\rho \Psi}{1 - \xi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right\}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\frac{\varepsilon^2}{1 - \xi^2} \frac{\partial\big(\mathrm{E}^2_\rho \Psi\big)}{\partial \rho} - \frac{\varepsilon^2}{\rho^2} \left\{ \rho^2 \Big( V_\rho \frac{\partial V_\rho}{\partial \xi} + V_\theta \frac{\partial V_\theta}{\partial \xi} \Big) - \frac{\mathrm{E}^2_\rho \Psi}{1 - \xi^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \right\}; \tag{3}$$

$$\rho \to \infty : \qquad \Psi \to \Psi_\infty = -\frac{1}{2} U \rho^2 \big(1 - \xi^2\big), \qquad p = 0. \tag{4}$$

На бесконечности движение среды носит потенциальный характер. Так как справедливы равенства $\mathrm{E}^2_\rho \Psi_\infty = \mathrm{L}_\rho \Psi_\infty = 0$, то искомая функция тока представляет собой сумму $\Psi_\infty + \Psi$. При этом второе слагаемое $\Psi \equiv \Psi(\rho, \xi)$ уже описывает деформацию однородного поступательного потока и исчезает на бесконечности. Далее рассматривается относительно функции $\Psi$ линейное однородное динамическое уравнение Озеена

$$\mathrm{E}^4_\rho \Psi + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial\big(\Psi_\infty, \mathrm{E}^2_\rho \Psi\big)}{\partial(\rho, \xi)} = 0. \tag{5}$$

Вдали от обтекаемого тела векторы $\mathbf{V}$ и $\mathbf{U}$ мало отличаются друг от друга. Поэтому такое обобщенное уравнение Стокса получается путем частичного учета инерционных сил, когда нелинейный член $\big(\mathbf{V}\nabla\big)\mathbf{V}$ исходного уравнения Навье-Стокса аппроксимируется выражением $\big(\mathbf{U}\nabla\big)\mathbf{V}$, которое представляет собой градиент вектора $\mathbf{V}$ по направлению вектора $\mathbf{U}$. Решение уравнения (5) правильно уточняет картину установившегося течения вязкой несжимаемой жидкости на больших расстояниях от тела [3, 4]. В различных задачах физико-химической гидродинамики применение принципа Ван-Дайка сращивания асимптотических разложений [5,6] при построении высших приближений требует интегрирования в общем случае возмущенного уравнения Озеена. Ниже обозначена схема к общему решению соответствующего однородного уравнения (5).

С помощью преобразования Гольдштейна [7]

$$\mathrm{E}^2_\rho \Psi = W \exp\big\{\frac{1}{2}\,\rho\xi\big\}$$

вводится промежуточная функция $W \equiv W(\rho, \xi)$

$$\frac{1}{\rho^2} \frac{\partial\big(\Psi_\infty, \mathrm{E}^2_\rho \Psi\big)}{\partial(\rho, \xi)} = -\Big(\frac{1 - \xi^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} + \xi \frac{\partial}{\partial \rho}\Big)\big(\mathrm{E}^2_\rho \Psi\big) = -\exp\big\{\frac{1}{2}\,\rho\xi\big\}\Big(\frac{1}{2} + \xi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1 - \xi^2}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi}\Big) W,$$

$$\mathrm{E}_\rho^4\Psi = \mathrm{E}_\rho^2\Big(W\exp\big\{\frac{1}{2}\,\rho\xi\big\}\Big) = \exp\big\{\frac{1}{2}\,\rho\xi\big\}\Big(\mathrm{E}_\rho^2 + \frac{1}{4} + \xi\,\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1-\xi^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\xi}\Big)W.$$

Так как озееновское уравнение (5) приводится к виду

$$\mathrm{E}_\rho^2 W = \frac{1}{4}\,W,$$

то решение $W$ ищется в виде бесконечного ряда

$$W = \sum_{s=0}^{\infty} f_s(\rho) J_s(\xi).$$

Угловыми частями являются ультрасферические полиномы $J_s(\xi) \equiv C_s^{-\frac{1}{2}}(\xi)$ Гегенбауэра степени $m = -0{,}5$. Эти линейно независимые функции Гегенбауэра первого рода определяются при любом целом значении индекса $s \geqslant 0$ дифференциальным уравнением [8, 9]

$$\big(1-\xi^2\big)\frac{d^2 J_s(\xi)}{d\xi^2} + s\big(s-1\big)J_s(\xi) = 0.$$

Поэтому радиальные коэффициенты $f_s(\rho)$ разложения находятся так

$$\frac{d^2 f_s(\rho)}{d\rho^2} - \Big\{\frac{s\big(s-1\big)}{\rho^2} + \frac{1}{4}\Big\}f_s(\rho) = 0, \qquad f_s(\rho) = \sqrt{\rho}\,X_s(\rho),$$

$$\rho^2\,\frac{d^2 X_s(\rho)}{d\rho^2} + \rho\,\frac{dX_s(\rho)}{d\rho} - \Big\{\frac{1}{4}\,\rho^2 + \big(s-\frac{1}{2}\big)^2\Big\}X_s(\rho) = 0, \quad X_s(\rho) = \Big\{K_{s-\frac{1}{2}}(\lambda\rho); I_{s-\frac{1}{2}}(\lambda\rho)\Big\},$$

где $Z_\nu(\lambda\rho) = \Big\{I_\nu(\lambda\rho), K_\nu(\lambda\rho)\Big\}$ – модифицированные функции Бесселя первого и второго родов, которые подчиняются уравнению ($\lambda = 0{,}5$)

$$\rho^2\,\frac{d^2 Z_\nu(\lambda\rho)}{d\rho^2} + \rho\,\frac{dZ_\nu(\lambda\rho)}{d\rho} - \big(\lambda^2\rho^2 + \nu^2\big)Z_\nu(\lambda\rho) = 0.$$

Так как $\mathrm{E}_\rho^2\Psi \to 0$ при $\rho \to \infty$, то справедливо неоднородное уравнение ($M_s$ – произвольные постоянные интегрирования)

$$\mathrm{E}_\rho^2\Psi = \sqrt{\rho}\,\exp\big(\lambda\rho\xi\big)\sum_{s=0}^{\infty} M_s K_{s-\frac{1}{2}}(\lambda\rho)J_s(\xi).$$

Известное разложение Сонина как вырожденная форма "теоремы сложения" для цилиндрических функций записывается в виде [10]

$$\exp\big(\rho\xi\big) = \Big(\frac{2}{\rho}\Big)^m \Gamma(m)\sum_{n=0}^{\infty}\big(n+m\big)\,C_n^m(\xi)\,I_{n+m}(\rho), \quad \Gamma(m+1) = m\,\Gamma(m), \quad \Gamma\big(\frac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi}.$$

Если в природе гидродинамической задачи исключаются особенности на оси симметрии течения, то накладываются условия $M_0 = M_1 = 0$. При $M_0 \neq 0$, $M_1 \neq 0$ формула Сонина

$$\exp\big(\lambda\rho\xi\big) = -\sqrt{\frac{1}{2}\,\pi\lambda\rho}\,\sum_{n=0}^{\infty}\big(2n-1\big)I_{n-\frac{1}{2}}(\lambda\rho)J_n(\xi)$$

вместе с рекуррентным свойством функций $J_n(\xi)$ дают в разложении $\mathrm{E}^2_\rho\Psi$ члены с полиномами $J_0(\xi)$ и $J_1(\xi)$. Однако присутствие таких слагаемых приводит к бесконечным тангенциальным скоростям на оси $\xi = \pm 1$.

Итак, уравнение (5) приводится к возмущенному уравнению в частных производных второго порядка

$$\mathrm{E}^2_\rho\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} M_{n+1}\Omega_{n+1}(\rho,\xi). \tag{6}$$

Здесь фигурируют

$$\Omega_{n+1}(\rho,\xi) = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\,\exp(\lambda Z)\,\omega_{n+1}(\rho,\xi), \quad \omega_{n+1}(\rho,\xi) = \rho j_n(\lambda\rho)J_{n+1}(\xi).$$

Сферические модифицированные функции $j_n(u)$ Бесселя третьего рода

$$j_n(u) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\,(-1)^{n+1}K_{n+\frac{1}{2}}(u) = \frac{\pi}{2}\,\sqrt{\frac{\pi}{2u}}\,\Big(I_{n+\frac{1}{2}}(u) - I_{-(n+\frac{1}{2})}(u)\Big)$$

и ультрасферические полиномы $J_n(\xi)$ Гегенбауэра удовлетворяют рекуррентным формулам справочной книги [8]

$$uj_{n-1}(u) - uj_{n+1}(u) = \big(2n+1\big)j_n(u), \quad u\,\frac{dj_n(u)}{du} - nj_n(u) = uj_{n+1}(u); \tag{7}$$

$$\big(2n-1\big)\xi J_n(\xi) = \big(n+1\big)J_{n+1}(\xi) + \big(n-2\big)J_{n-1}(\xi), \tag{8}$$

$$\big(1-\xi^2\big)\,\frac{dJ_n(\xi)}{d\xi} = \big(n-2\big)J_{n-1}(\xi) - n\xi J_n(\xi). \tag{9}$$

Общее решение уравнения (6) суть сумма общего решения $\Psi^{'}$ соответствующего однородного уравнения и частных интегралов $\Psi^{''}$ возмущенного уравнения (6). Решение однородного уравнения $\mathrm{E}^2_\rho\Psi^{'} = 0$ дает потенциальную составляющую течения

$$\Psi^{'}(\rho,\xi) = \sum_{n=2}^{\infty}\Big\{\rho^n;\rho^{-n+1}\Big\}J_n(\xi).$$

Далее при записи вихревой составляющей векторного поля скорости $\mathbf{v}^{''}$ и соответствующей скалярной функции тока $\Psi^{''}$ штрихи сверху опускаются. Тогда в искомом разложении

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} M_{n+1}\Psi_{n+1}(\rho,\xi) \tag{10}$$

$\Psi_{n+1} \equiv \Psi_{n+1}(\rho,\xi)$ есть частное решение уравнения $\mathrm{E}^2_\rho\Psi_{n+1} = \Omega_{n+1}$. Посредством исчезающих на бесконечности функций $\Omega_{n+1} \equiv \Omega_{n+1}(\rho,\xi)$ описывается распределение интенсивности завихренности на больших расстояниях от обтекаемого шара (во внешней области). Величина $\mathrm{E}^2_\rho\Psi$ называется «озеенлетом» по аналогии со «стокслетом». С физической точки зрения функция $\Omega_{n+1}$ имеет смысл «круговой вихревой силы». Другими словами, с точностью до постоянного неопределенного множителя $M_{n+1}$ значение $\Omega_{n+1}$ равно проекции $\rho\sqrt{1-\xi^2}\mathbf{e}_\varphi\mathrm{rot}\mathbf{v}_{n+1}$, где $\rho\sqrt{1-\xi^2}$ – расстояние точки наблюдения

до оси симметрии течения после применения преобразования радиальной координаты; $\mathbf{v}_{n+1}$ – вихревая компонента векторного поля скорости, которая вычисляется через скалярную функцию $\Psi_{n+1}$ [1].

Информация о частных интегралах $\Psi_{n+1}$ крайне необходима для физически достаточно полной и корректной процедуры сращивания асимптотических разложений различных полей во внешней и внутренней областях. Например, при изучении переноса твердого шара в режиме со скольжением в бесконечной неравномерно нагретой вязкой среде. Тогда оценка влияния инерционных и конвективных эффектов на динамику тела потребует совместного решения гидродинамической и тепловой задач. В этом случае уже нельзя ограничиться только общеизвестным озеевским интегралом

$$\Psi_2(\rho,\xi) = -\sqrt{\pi}\big(1+\xi\big)\bigg(1-\exp\Big\{-\frac{1}{2}\,\rho\big(1-\xi\big)\Big\}\bigg).$$

Далее применяется метод частного дифференцирования по координате $Z \equiv \rho\xi = \varepsilon z$ (вдоль оси симметрии течения). Очевидное равенство

$$\frac{\partial}{\partial Z} = \frac{\partial\rho}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial\xi}{\partial Z}\frac{\partial}{\partial\xi} = \xi\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1-\xi^2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\xi} = \big(1-\xi^2\big)\mathrm{L}_\rho$$

с учетом формул (7) – (9) дает для целого $n \geqslant 1$ $\Big(\omega_{n+1} \equiv \omega_{n+1}(\rho,\xi)\Big)$

$$\frac{\partial\Omega_{n+1}}{\partial Z} = (-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2\lambda}{\pi}}\,\exp(\lambda Z)\Big(\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial Z} + \lambda\omega_{n+1}\Big),$$

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial Z} = \Big(\rho\,\frac{dj_n(\lambda\rho)}{d\rho} + j_n(\lambda\rho)\Big)\xi J_{n+1}(\xi) + j_n(\lambda\rho)\big(1-\xi^2\big)\frac{dJ_{n+1}(\xi)}{d\xi} = \\
= \Big(\big(n+1\big)j_n(\lambda\rho) + \lambda\rho j_{n+1}(\lambda\rho)\Big)\xi J_{n+1}(\xi) + j_n(\lambda\rho)\Big(\big(n-1\big)J_n(\xi) - \big(n+1\big)\xi J_{n+1}(\xi)\Big) = \\
= \frac{\lambda}{2n+1}\,\rho j_{n+1}(\lambda\rho)\Big(\big(n+2\big)J_{n+2}(\xi) + \big(n-1\big)J_n(\xi)\Big) + \big(n-1\big)j_n(\lambda\rho)J_n(\xi) = \\
= \frac{\lambda}{2n+1}\Big(\big(n+2\big)\rho j_{n+1}(\lambda\rho)J_{n+2}(\xi) + \big(n-1\big)\rho j_{n-1}(\lambda\rho)J_n(\xi)\Big).
\end{gathered}$$

Отсюда следует простое рекуррентное соотношение

$$\big(n+2\big)\lambda\omega_{n+2} = \big(2n+1\big)\frac{\partial\omega_{n+1}}{\partial Z} - \big(n-1\big)\lambda\omega_n.$$

Тогда функции $S_m \equiv S_m(\rho,\xi) = \big\{\Omega_m;\Psi_m\big\}$ удовлетворяют свойству

$$\big(n+2\big)\lambda S_{n+2} = -\big(2n+1\big)\Big(\frac{\partial S_{n+1}}{\partial Z} - \lambda S_{n+1}\Big) - \big(n-1\big)\lambda S_n.$$

В правой части последнего равенства присутствует слагаемое со множителем $\big(n-1\big)$. Поэтому все частные интегралы $\Psi_{n+2}$ при любом целом значении $n \geqslant 1$ выражаются в конечном счете через классическое озеевское решение $\Psi_2$. Опуская промежу-

точные выкладки получаем формулы

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial\rho} = -\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\big(1-\xi^2\big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big],$$

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial\xi} = -\sqrt{\pi}\,\Big\{1-\frac{1}{2}\,\rho\big(1+\frac{2}{\rho}+\xi\big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\},$$

$$\frac{\partial\Psi_2}{\partial Z} = -\sqrt{\pi}\,\big(1-\xi^2\big)\Big\{\frac{1}{\rho}-\frac{1}{2}\,\big(1+\frac{2}{\rho}\big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\},$$

$$\Psi_3 = -\sqrt{\pi}\,\big(1+\xi\big)\Big\{1-\frac{2}{\rho}\,\big(1-\xi\big)-\Big(1-\big(1+\frac{2}{\rho}\big)\big(1-\xi\big)\Big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\}, \qquad (11)$$

$$\frac{\partial\Psi_3}{\partial\rho} = -\sqrt{\pi}\,\big(1-\xi^2\big)\Big\{\frac{2}{\rho^2}-\Big(\frac{1}{\rho}+\frac{2}{\rho^2}-\frac{1}{2}\,\big(1+\frac{2}{\rho}\big)\xi\Big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\},$$

$$\frac{\partial\Psi_3}{\partial\xi} = -\sqrt{\pi}\,\Big\{1+\frac{4}{\rho}\,\xi-\frac{1}{2}\,\rho\Big(\big(1+\frac{4}{\rho}+\frac{8}{\rho^2}\big)\xi+\big(1+\frac{2}{\rho}\big)\xi^2\Big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\}$$

$$\frac{\partial\Psi_3}{\partial Z} = -\sqrt{\pi}\,\big(1-\xi^2\big)\Big\{\frac{1}{\rho}+\frac{6}{\rho^2}\,\xi-\frac{1}{2}\,\big(1+\frac{6}{\rho}+\frac{12}{\rho^2}\big)\xi\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\},$$

$$\Psi_4 = -\sqrt{\pi}\,\big(1+\xi\big)\Big\{1-5\big(\frac{1}{\rho}+\frac{3}{\rho^2}\,\xi\big)\big(1-\xi\big)-$$
$$-\frac{1}{4}\,\Big(4-5\Big(1+\frac{2}{\rho}+\big(1+\frac{6}{\rho}+\frac{12}{\rho^2}\big)\xi\Big)\big(1-\xi\big)\Big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\}, \qquad (12)$$

$$\frac{\partial\Psi_4}{\partial\rho} = -\sqrt{\pi}\,\big(1-\xi^2\big)\Big\{\frac{5}{\rho^2}+\frac{30}{\rho^3}\,\xi-\frac{1}{8}\Big(1+\frac{10}{\rho}+\frac{20}{\rho^2}+$$
$$+20\big(\frac{1}{\rho}+\frac{6}{\rho^2}+\frac{12}{\rho^3}\big)\xi-5\big(1+\frac{6}{\rho}+\frac{12}{\rho^2}\big)\xi^2\Big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\},$$

$$\frac{\partial\Psi_4}{\partial\xi} = -\sqrt{\pi}\,\Big\{1-\frac{6}{\rho^2}+\frac{10}{\rho}\,\xi+\frac{9}{\rho^2}\,\big(5\xi^2-1\big)+$$
$$+\frac{1}{8}\,\rho\Big(1+\frac{12}{\rho}+\frac{60}{\rho^2}+\frac{120}{\rho^3}+\big(1+\frac{10}{\rho}+\frac{20}{\rho^2}\big)\xi-5\big(1+\frac{8}{\rho}+\frac{36}{\rho^2}+\frac{72}{\rho^3}\big)\xi^2-$$
$$-5\big(1+\frac{6}{\rho}+\frac{12}{\rho^2}\big)\xi^3\Big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\},$$

$$\frac{\partial\Psi_4}{\partial Z} = -\sqrt{\pi}\,\big(1-\xi^2\big)\Big\{\frac{1}{\rho}+\frac{15}{\rho^2}\,\xi+\frac{15}{\rho^3}\,\big(5\xi^2-1\big)-$$
$$-\frac{1}{8}\,\Big(1+\frac{12}{\rho}+\frac{60}{\rho^2}+\frac{120}{\rho^3}\Big)\big(5\xi^2-1\big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\},$$

$$\Psi_5 = -\sqrt{\pi}\,\big(1+\xi\big)\Big\{1-3\Big(\frac{3}{\rho}+\frac{21}{\rho^2}\,\xi+\frac{14}{\rho^3}\,\big(5\xi^2-1\big)\Big)\big(1-\xi\big)-$$
$$-\Big(1-\frac{1}{20}\,\Big(27\big(1+\frac{2}{\rho}\big)+35\big(1+\frac{6}{\rho}+\frac{12}{\rho^2}\big)\xi+$$
$$+\,7\big(1+\frac{12}{\rho}+\frac{60}{\rho^2}+\frac{120}{\rho^3}\big)\big(5\xi^2-1\big)\Big)\big(1-\xi\big)\Big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\}. \quad (13)$$

По-видимому, рекуррентная формула для частных решений $\Psi_n$, $\Psi_{n+1}$, $\Psi_{n+2}$ однородного уравнения Озеена

$$\big(n+2\big)\Psi_{n+2} = -\big(2n+1\big)\Big(2\,\frac{\partial\Psi_{n+1}}{\partial Z}-\Psi_{n+1}\Big)-\big(n-1\big)\Psi_n \quad (14)$$

неизвестна в литературе (по крайней мере автору). Новые частные интегралы этого уравнения позволяют построить равномерно пригодное приближение для функции тока. Они имеют научно-методический интерес и существенно дополняют исследования Праудмена и Пирсона [5].

Если в теории термодиффузиофореза аэрозольных частиц исследуется квазистационарное приближение, то главный или нулевой член внутреннего разложения функции тока по числам Рейнольдса [11, 12]

$$\psi_{[0]}(r,\xi) = \big(-r^2+B^{(s)}_{2,[0]}r^{-1}\big)J_2(\xi)$$

описывает потенциальное течение и сразу определяет форму следующих членов во внешней области

$$\Psi(\rho,\xi) = -\rho^2 J_2(\xi)+\varepsilon^3\Psi_{[1]}(\rho,\xi)+\ldots, \qquad U = 1+\varepsilon^3 U_{[1]}+\ldots.$$

Эти выражения подставляются в формулы (1) и (4), а затем в обеих частях каждого равенства приравниваются коэффициенты при $\varepsilon^3$. Функция $\Psi_{[0]}(\rho,\xi) = -\rho^2 J_2(\xi)$ удовлетворяет тождествам $\mathrm{E}^2_\rho\Psi_{[0]} = \mathrm{L}_\rho\Psi_{[0]} = 0$. Поэтому для вторых членов внешних разложений имеем

$$\rho \geqslant 1: \quad \mathrm{E}^4_\rho\Psi_{[1]} = -\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\big(\Psi_{[0]},\,\mathrm{E}^2_\rho\Psi_{[1]}\big)}{\partial(\rho,\xi)}; \quad \rho\to\infty: \quad \Psi_{[1]}\to-\frac{1}{2}\,U_{[1]}\rho^2\big(1-\xi^2\big).$$

Для данного приближения условие сращивания Ван-Дайка гласит: внутреннее разложение до порядка $O(1)$ внешнего разложения до порядка $O(\varepsilon^3)$ равно внешнему разложению до порядка $O(\varepsilon^3)$ внутреннего разложения до порядка $O(1)$. Перепишем «озеенлет» в переменных Стокса $(r,\psi)$. Соответствующее слагаемое в выражении для «стокслета» принимает вид

$$\Big(\mathrm{E}^2_r\psi(r,\xi)\Big) := \varepsilon^3\sqrt{\varepsilon r}\exp\big(\frac{1}{2}\,\varepsilon r\xi\big)\sum_{s=2}^{\infty}M_s K_{s-\frac{1}{2}}\big(\frac{1}{2}\,\varepsilon r\big)J_s(\xi).$$

Так как модифицированная функция Бесселя второго рода (функция Макдональда) полуцелого порядка определяется замкнутой формой [13]

$$K_{s+\frac{1}{2}}(u) = \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\,\exp\big(-u\big)\sum_{j=0}^{s}\frac{\big(s+j\big)!}{j!\big(s-j\big)!}\,\big(2u\big)^{-j},$$

то для малых значений $u$ получаем

$$K_{s+\frac{1}{2}}(u) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\,\frac{(2s)!}{s!}\,(2u)^{-s},$$

$$\sqrt{\varepsilon r}\exp\big(\frac{1}{2}\,\varepsilon r\xi\big)K_{s-\frac{1}{2}}\big(\frac{1}{2}\,\varepsilon r\big) \sim \sqrt{\pi}\,\frac{\big(2(s-1)\big)!}{(s-1)!}\,(\varepsilon r)^{-s+1}.$$

При сращивании асимптотических разложений рассматриваются члены ряда с порядком малости выше первого. Члены с индексом $s \geqslant 4$ имеют порядок $o(1)$ и опускаются как несращиваемые по принципу минимальной особенности: $M_s = 0$ при $s \geqslant 4$. Тогда во внешней области распределение интенсивности завихренности до порядка $O(\varepsilon^3)$ описывается выражением

$$\mathrm{E}^2_\rho\Psi_{[1]}(\rho,\xi) = \sqrt{\rho}\exp\big(\frac{1}{2}\,\rho\xi\big)\Big(M_2K_{\frac{3}{2}}(\frac{1}{2}\,\rho)J_2(\xi) + M_3K_{\frac{5}{2}}(\frac{1}{2}\,\rho)J_3(\xi)\Big).$$

а общее решение этого неоднородного уравнения записывается в виде

$$\Psi_{[1]}(\rho,\xi) = \sum_{n=2}^{\infty}\Big\{A^{(o)}_{n,[1]}\rho^n + B^{(o)}_{n,[1]}\rho^{-n+1}\Big\}J_n(\xi) - M_2\sqrt{\pi}\,\big(1+\xi\big)\Big\{1-\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\} -$$

$$- M_3\sqrt{\pi}\,\big(1+\xi\big)\Big\{1-\frac{2}{\rho}\,\big(1-\xi\big) - \Big(1-\big(1+\frac{2}{\rho}\big)\big(1-\xi\big)\Big)\exp\Big[-\frac{\rho\big(1-\xi\big)}{2}\Big]\Big\}.$$

Из условия на бесконечности следуют равенства $A^{(o)}_{2,[1]} = -U_{[1]}$, $A^{(o)}_{n,[1]} = 0$ при $n \geqslant 3$. Сферические модифицированные функции Бесселя первого и третьего родов

$$f_n(u) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\,I_{n+\frac{1}{2}}(u), \qquad j_n(u) \equiv \sqrt{\frac{\pi}{2u}}\,(-1)^{n+1}K_{n+\frac{1}{2}}(u)$$

имеют одинаковые свойства (7). Тогда обе части формулы Сонина

$$\exp\big(\rho\xi\big) = -\rho\sum_{n=0}^{\infty}\big(2n-1\big)f_{n-1}(\rho)J_n(\xi) \tag{15}$$

продифференцируем по $\rho$ дважды с учетом рекуррентных соотношений (7)

$$\xi\exp\big(\rho\xi\big) = -\sum_{n=0}^{\infty}\big(2n-1\big)\Big(\rho f_n(\rho) + nf_{n-1}(\rho)\Big)J_n(\xi),$$

$$\xi^2\exp\big(\rho\xi\big) = -\sum_{n=0}^{\infty}\big(2n-1\big)\Big(\rho + \frac{n\big(n-1\big)}{\rho}\Big)f_{n-1}(\rho)J_n(\xi).$$

В результате разложение (15) и тождество вида

$$\big(1-\xi^2\big)\exp\big(\rho\xi\big) = -\sum_{n=0}^{\infty}n\big(n-1\big)\Big(f_n(\rho) - f_{n-2}(\rho)\Big)J_n(\xi)$$

дают для функции $\Psi_{[1]}(\rho,\xi)$ бесконечный ряд по полиномам Гегенбауэра

$$\Psi_{[1]}(\rho,\xi) = -\Big(U_{[1]}\rho^2 - 4M_3\sqrt{\pi}\rho^{-1}\Big)J_2(\xi) + \sum_{n=2}^{\infty}B^{(o)}_{n,[1]}\rho^{-n+1}J_n(\xi) -$$

$$- \frac{1}{2}\,\sqrt{\pi}\exp\big\{-\frac{1}{2}\,\rho\big\}\sum_{n=2}^{\infty}\big(2n-1\big)\Big[M_2R_{n,\,2}(\rho) + M_3R_{n,\,3}(\rho)\Big]J_n(\xi). \tag{16}$$

Здесь введены обозначения

$$R_{n,\,2}(\rho) = \rho f_n(\frac{1}{2}\,\rho) + \big(\rho + 2n\big) f_{n-1}(\frac{1}{2}\,\rho), \tag{17}$$

$$R_{n,\,3}(\rho) = \rho f_n(\frac{1}{2}\,\rho) + \Big(\rho + 2n + 4n\big(n-1\big)\big(\rho^{-1} + 2\rho^{-2}\big)\Big) f_{n-1}(\frac{1}{2}\,\rho), \tag{18}$$

а слагаемые с многочленами $J_0(\xi) \equiv 1$ и $J_1(\xi) \equiv -\xi$

$$- M_{2,\,3}\sqrt{\pi}\,\Big\{1 - \frac{1}{2}\,\rho\Big(f_{-1}(\frac{1}{2}\,\rho) + f_0(\frac{1}{2}\,\rho)\Big)\exp\big(-\frac{1}{2}\,\rho\big) J_0(\xi)\Big\},$$

$$- M_{2,\,3}\sqrt{\pi}\,\Big\{\xi + \frac{1}{2}\,\rho\Big(f_{-1}(\frac{1}{2}\,\rho) + f_0(\frac{1}{2}\,\rho)\Big)\exp\big(-\frac{1}{2}\,\rho\big) J_1(\xi)\Big\}$$

тождественно равны нулю в силу соотношений

$$f_{-1}(\frac{1}{2}\,\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{\rho}}\,I_{-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\,\rho) = \frac{2}{\rho}\,\operatorname{ch}(\frac{1}{2}\,\rho), \qquad f_0(\frac{1}{2}\,\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{\rho}}\,I_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}\,\rho) = \frac{2}{\rho}\,\operatorname{sh}(\frac{1}{2}\,\rho).$$

Функция Бесселя чисто мнимого аргумента имеет представление

$$I_{n+\frac{1}{2}}(t) = \big(\frac{t}{2}\big)^{n+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\Gamma\Big(k + n + \dfrac{3}{2}\Big)}\,\big(\frac{t}{2}\big)^{2k}.$$

Поэтому с помощью свойства гамма-функции получаем последовательно

$$\Gamma\Big(n + \frac{3}{2}\Big) = \frac{\big(2n+1\big)!!}{2^{n+1}}\,\sqrt{\pi}, \qquad f_n(t) = t^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!\big(2k + 2n + 1\big)!!}\,\big(\frac{1}{2}\,t^2\big)^k.$$

Если поле скоростей во внутренней области определяется с точностью до слагаемых порядка $O(\varepsilon^3)$ включительно, то двухчленное разложение функции тока $\Psi(\rho, \xi)$ переписывается в переменных $\big(r, \psi\big)$ Стокса до членов порядка $O(\varepsilon^3)$ включительно. При этом радиальная координата $r$ считается фиксированной переменной и применяется равенство $\big(t = 0,5\,\varepsilon r\big)$

$$\exp(-t) f_n(t) = \frac{t^n}{\big(2n+1\big)!!}\Big[1 - t + \Big(1 + \frac{1}{2n+3}\Big)\frac{t^2}{2!} - \Big(1 + \frac{3}{2n+3}\Big)\frac{t^3}{3!} +$$

$$+ \Big(1 + \frac{6}{2n+3} + \frac{3}{\big(2n+3\big)\big(2n+5\big)}\Big)\frac{t^4}{4!} - \Big(1 + \frac{10}{2n+3} + \frac{15}{\big(2n+3\big)\big(2n+5\big)}\Big)\frac{t^5}{5!} +$$

$$+ \Big(1 + \frac{15}{2n+3} + \frac{45}{\big(2n+3\big)\big(2n+5\big)} + \frac{15}{\big(2n+3\big)\big(2n+5\big)\big(2n+7\big)}\Big)\frac{t^6}{6!} - \dots\Big].$$

По принципу минимальной особенности $B^{(o)}_{n,[1]} = 0$, $n \geqslant 3$. Тогда в выражении для функции тока $\psi(r, \xi)$ соответствующие слагаемые имеют вид

$$\Big(\psi(r,\xi)\Big) := \big(-r^2 + B^{(o)}_{2,[1]} r^{-1}\big) J_2(\xi) -$$

$$- \Big(\frac{1}{5}\,\sqrt{\pi}\big(5M_2 + 3M_3\big)\varepsilon^2 r + \Big(U_{[1]} - \frac{1}{12}\,\sqrt{\pi}\big(3M_2 + M_3\big)\Big)\varepsilon^3 r^2\Big) J_2(\xi) -$$

$$- \sqrt{\pi}\Big(2M_3\varepsilon + \frac{1}{28}\,\big(7M_2 + M_3\big)\varepsilon^3 r^2\Big) J_3(\xi) -$$

$$- \frac{2}{5}\,\sqrt{\pi}\,M_3\varepsilon^2 r J_4(\xi) - \frac{1}{21}\,\sqrt{\pi}\,M_3\varepsilon^3 r^2 J_5(\xi). \tag{19}$$

Отсюда сразу видна форма второго члена внутреннего разложения

$$\psi(r,\xi) = \big( -r^2 + B^{(s)}_{2,[0]} r^{-1} \big) J_2(\xi) + \varepsilon \psi_{[1]}(r,\xi) + \ldots .$$

Искомая поправка $U_{[1]}$ вычисляется из граничных условий в соответствующем приближении. Правильное определение этой величины потребует корректного проведения физически достаточно полной процедуры сращивания асимптотических разложений, что окажется невозможным при наличии только классического озееновского решения. Действительно, если в формуле (19) считать $M_3 \equiv 0$, то второй член разложения функции тока во внутренней области будет пропорциональным степени $\varepsilon^2$. Очевидно, что это приведет в конечном счете к другому значению $U_{[1]}$. Также получаются ошибочные результаты на основе одного общеизвестного интеграла Озеена [14], если сразу задаются формы разложений во внутренней и внешней областях по степеням малых чисел Рейнольдса.

# Список литературы


[1] *J. Happel, H. Brenner.* Low Reynolds number hydrodynamics. Prentice—Hall, 1965. Русский перевод: *Дж. Хаппель, Г. Бреннер.* Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. Перевод с англ. Бермана В. С. и Маркова В. Г. Под ред. Буевича Ю. А. М.: Мир, 1976. 632 с.

[2] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика. В 10 т. Т. 6. Гидродинамика. 4-е изд., стер. М.: Наука, 1988. 736 с.

[3] *Г. Ламб.* Гидродинамика. М.: Гостехиздат, 1947.

[4] *Н.Е. Кочин, И.А. Кибель, Н.В. Розе.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. М.: Физматгиз, 1963.

[5] *I. Proudman, J.R.A. Pearson.* Expansions at small Reynolds number for the flow part a sphere and circular cylinder // J. Fluid Mech., 1957. V. 2. No. 3. P. 237–262. Русский перевод: *И. Праудмен, Дж. Пирсон.* Разложения по малым числам Рейнольдса в задачах обтекания сферы и кругового цилиндра // Сб. Механика. 1958. Т. 48. № 2. С. 3–28.

[6] *M. Van Dyke* Perturbation methods in fluid mechanics. Academic Press, 1964. Русский перевод: *М. Ван-Дайк.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 312 с.

[7] *S. Goldstein.* The steady flow of viscous fluid past a fixed spherical obstacle at small Reynolds numbers // Proc. Roy. Soc. (London), Ser. A. 1929. V. 123. p. 225–235.

[8] Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под общей ред. Абрамовица М., Стиган И. М.: Наука, 1979. 832 с.

[9] *Г. Корн, Т. Корн.* Mathematical handbook for scientists and engineers. Русский перевод: Справочник по математике для научных работников и инженеров. Пер. со второго американского перераб. изд. под общей ред. Арамановича И.Г. 5-е изд. М.: Наука, 1984. 831 с.

[10] *Н.Я. Сонин.* Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах. М.: Гостехиздат, 1954. 243 с.

[11] *Ю.И. Яламов, В.С. Галоян.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.

[12] *Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов, З.Л. Шулиманова.* Избранные вопросы физики аэрозолей. М.: Изд-во МПУ, 1992. 297 с.

[13] *И.С. Градштейн, И.М. Рыжик.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1971.

[14] *И.М. Скачков.* Исследование влияния форм – факторов, инерционных и конвективных эффектов на движение аэрозольных частиц в неоднородных газах. Дисс. канд. ф.-м. наук. Москва, 1985.

# АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ В ЗАДАЧЕ О ДРЕЙФЕ ЛЕТУЧЕЙ СОСТАВНОЙ КАПЛИ В НЕОДНОРОДНОЙ БИНАРНОЙ ГАЗОВОЙ СМЕСИ*

**С.Н. Дьяконов, Б.В. Рюмшин**

Орловский государственный университет

В реальных облаках и туманах часто встречаются двухслойные аэрозольные частицы, которые образуются при конденсации пара на твердых ядрах. Такие частицы представляют особый интерес в практических приложениях, связанных с охраной окружающей среды и взаимодействием оптического излучения с аэродисперсными системами. В инженерной практике, энергетике, химической и космической технологии также нередко применяются капли с жидкими включениями.

Ниже представлены результаты численного анализа задачи о направленном переносе крупной летучей капли с жидким подвижным ядром в неоднородной по температуре и концентрациям компонентов бинарной газовой смеси «$N_2$+$H_2O$» [1]. При этом применяются обозначения указанной работы. Учет влияния слоя Кнудсена и термодиффузионных эффектов на динамику частицы не производится ($k_{TT} = k_{TC} = k_{CC} = k_{CT} \equiv 0$, $K_{\mathrm{TD}} \equiv 0$); внутреннее тепловыделение отсутствует ($q_0 \equiv 0$); коэффициенты межфазного поверхностного натяжения $\sigma_{12}$, $\sigma_{23}$ монотонно убывают с ростом температуры по линейному закону как для подавляющего большинства чистых жидкостей в достаточно широком интервале температур ($\alpha_{12} = \alpha_{23} \equiv 0$, $\beta_{12} < 0$, $\beta_{23} < 0$).

В расчетах используются следующие параметры: $T_0^* = T_{\mathrm{w}} = 293$ K; $A_T = 100$ K/м; $A_C = 10^{-4}$ м$^{-1}$; $\eta_0^{(1)} = 18$ мкПа·с; $\eta_0^{(2)} = 1004$ мкПа·с; $\beta_{12} = -0.13$ мН·м$^{-1}\cdot$K$^{-1}$; $\varkappa_0^{(1)} = 0.0257$ Вт·м$^{-1}\cdot$K$^{-1}$; $\varkappa_0^{(2)} = 0.559$ Вт·м$^{-1}\cdot$K$^{-1}$; $D_{12} = 2.1\cdot10^{-5}$ м$^2\cdot$с$^{-1}$; $L = 2.46$ МДж·кг$^{-1}$; $C_0 = 0.0001$; $m_1 = 0.3\cdot10^{-25}$ кг; $n_0 = 2.7\cdot10^25$ м$^{-3}$; $k = 1.38\cdot10^{-23}$ Дж$\cdot$K$^{-1}$; $p_{1\mathrm{s}} = 4$ кПа.

Очевидно, что предел $\lim\limits_{\varepsilon\to0} U_{\mathrm{ph}}^*$ есть значение размерной скорости течения в геометрическом центре вязкого однородного шара, который дрейфует со скоростью $\lim\limits_{\varepsilon\to0} U_{\mathrm{ph}}$ относительно лабораторной системы координат в направлении внешнего температурного градиента $\mathbf{A}_T||\mathbf{A}_{\mathrm{C}}$.

Табл. 1. Зависимость динамических параметров от $\varepsilon \equiv R_*/R$ для газового пузыря с летучей водяной оболочкой: $\beta_{23} = -0.13$ мН$\cdot$м$^{-1}\cdot$K$^{-1}$; $\varkappa_0^{(3)} = 0.0257$ Вт·м$^{-1}\cdot$K$^{-1}$; $\eta_0^{(3)} = 18\cdot10^{-6}$ Па·с.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-96411 р_цчр_а).

| $\varepsilon$ | $U_{ph}$, $\frac{\text{мкм}}{\text{с}}$ | $U^*_{ph}$, $\frac{\text{мкм}}{\text{с}}$ | $1-\frac{U^*_{ph}}{U_{ph}}$ | $F_\sigma$, пН | $F^*_\sigma$, пН |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1000 | 0.703668 | 1.207020 | -0.71533 | 0.02224 | 0.17016 |
| 0.3000 | 0.727898 | 1.502815 | -1.06460 | 0.01734 | 0.82247 |
| 0.5000 | 0.911390 | 1.762327 | -0.93367 | 0.01097 | 2.27264 |
| 0.6000 | 1.165121 | 1.863213 | -0.59916 | 0.00792 | 3.63228 |
| 0.7000 | 1.658321 | 1.933212 | -0.16576 | 0.00527 | 5.93566 |
| 0.8000 | 2.697695 | 1.955775 | 0.27502 | 0.00309 | 10.54294 |
| 0.8500 | 3.718969 | 1.935628 | 0.47952 | 0.00218 | 15.12838 |
| 0.9000 | 5.646314 | 1.869188 | 0.66895 | 0.00136 | 24.26183 |
| 0.9200 | 6.989394 | 1.815532 | 0.74024 | 0.00107 | 31.09595 |
| 0.9400 | 9.050902 | 1.729033 | 0.80897 | 0.00078 | 42.47314 |
| 0.9600 | 12.613046 | 1.574939 | 0.87513 | 0.00051 | 65.20557 |
| 0.9800 | 20.245569 | 1.239137 | 0.93880 | 0.00025 | 133.35875 |
| 0.9850 | 23.742197 | 1.084467 | 0.95432 | 0.00019 | 178.78508 |
| 0.9900 | 28.636284 | 0.867680 | 0.96970 | 0.00012 | 269.63096 |
| 0.9930 | 32.638759 | 0.690210 | 0.97885 | 0.00009 | 386.42865 |
| 0.9960 | 37.903419 | 0.456653 | 0.98795 | 0.00005 | 678.41541 |
| 0.9990 | 45.138664 | 0.135551 | 0.99700 | 0.00001 | 2722.30000 |
| 0.9995 | 46.616016 | 0.069959 | 0.99850 | 0.00001 | 5447.49493 |
| 0.9996 | 46.923139 | 0.056330 | 0.99880 | 0.00000 | 6810.06008 |
| 0.9997 | 47.233769 | 0.042523 | 0.99910 | 0.00000 | 9081.09360 |
| 0.9998 | 47.549405 | 0.028535 | 0.99940 | 0.00000 | 13623.09334 |
| 0.9999 | 47.869270 | 0.014362 | 0.99970 | 0.00000 | 27249.06619 |

Табл. 2. Зависимость динамических параметров от $\varepsilon \equiv R_*/R$ для капли с глицериновым ядром и летучей водяной оболочкой: $\beta_{23} = -0.1$ мН $\cdot$ м$^{-1} \cdot$ К$^{-1}$; $\varkappa_0^{(3)} = 0.283$ Вт$\cdot$м$^{-1} \cdot$ К$^{-1}$; $\eta_0^{(3)} = 1.393$ Па$\cdot$с.

| $\varepsilon$ | $U_{ph}$, $\frac{\text{мкм}}{\text{с}}$ | $U^*_{ph}$, $\frac{\text{мкм}}{\text{с}}$ | $1-\frac{U^*_{ph}}{U_{ph}}$ | $F_\sigma$, пН | $F^*_\sigma$, пН |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.100 | 0.413091 | 0.609358 | -0.47512 | 0.01276 | 0.13504 |
| 0.300 | 0.411501 | 0.527062 | -0.28083 | 0.00983 | 0.54148 |
| 0.500 | 0.392506 | 0.367374 | 0.06403 | 0.00665 | 1.26438 |
| 0.600 | 0.363150 | 0.267088 | 0.26452 | 0.00512 | 1.88190 |
| 0.700 | 0.310583 | 0.165599 | 0.46681 | 0.00368 | 2.89575 |
| 0.800 | 0.229919 | 0.078007 | 0.66072 | 0.00235 | 4.90155 |
| 0.850 | 0.179338 | 0.044428 | 0.75227 | 0.00172 | 6.89758 |
| 0.900 | 0.123171 | 0.019777 | 0.83944 | 0.00112 | 10.88244 |
| 0.920 | 0.099474 | 0.012634 | 0.87299 | 0.00089 | 13.87016 |
| 0.940 | 0.075240 | 0.007090 | 0.90577 | 0.00066 | 18.85118 |
| 0.960 | 0.050590 | 0.003148 | 0.93777 | 0.00043 | 28.82568 |
| 0.980 | 0.025646 | 0.000796 | 0.96897 | 0.00021 | 58.86222 |
| 0.985 | 0.019380 | 0.000452 | 0.97665 | 0.00016 | 78.98259 |
| 0.990 | 0.013104 | 0.000206 | 0.98429 | 0.00011 | 119.44436 |
| 0.993 | 0.009336 | 0.000104 | 0.98885 | 0.00007 | 171.87114 |
| 0.996 | 0.005565 | 0.000037 | 0.99341 | 0.00004 | 304.72001 |
| 0.999 | 0.001793 | 0.000003 | 0.99805 | 0.00001 | 1278.99643 |

# Список литературы

[1] *С.Н. Дьяконов.* К вопросу о движении капель с жидкими включениями в неоднородных вязких средах // Международная научная конференция «Современные методы физико-математических наук», Орёл, 9–14 октября 2006 г.

## ОСОБЕННОСТИ ДВИЖЕНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ КАПЕЛЬ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

**О.С.Копылова**

Ставропольский государственный университет

**Введение.** В связи с синтезом в середине 60-х годов жидких намагничивающихся сред - магнитных жидкостей (ферроколлоидов) возникла идея создания магниточувствительных эмульсий и аэрозолей, в которых в роли дисперсной среды выступают капли магнитной жидкости. Действие даже слабых магнитных полей на капли такой среды может приводить к деформации, а также пульсации их формы (в случае переменного поля). Ранее в [1] нами были приведены результаты исследования движения одиночных капель магнитной жидкости в поле силы тяжести при дополнительном воздействии на них постоянных и переменных магнитных полей, направленных под различными углами к траектории движения. В настоящей работе изучены особенности совместного движения двух одинаковых капель магнитной жидкости, обусловленные их гидродинамическим и магнитным взаимодействием.

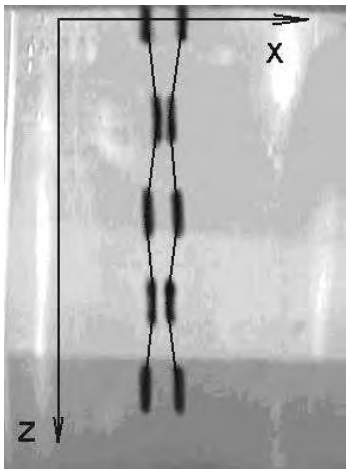



Рис. 1. Траектории движения двух капель магнитной жидкости в переменном магнитном поле, когда направление движения капель параллельно с направлением напряженности магнитного поля.

Рис. 2. Траектории движения двух капель магнитной жидкости в переменном магнитном поле, когда направление движения капель перпендикулярно направлению напряженности магнитного поля.

**Экспериментальные результаты.** Обнаружено, что воздействие переменного магнитного поля на движущиеся капли приводит к пульсации их формы и периодическому изменению коэффициента сопротивления движению. Кроме того, величина магнитного момента капли также изменяется в соответствии с периодическим изменением намагничивающего поля. Это приводит к ряду особенностей совместного движения взаимодействующих капель, определяемых соотношением сил отталкивания и притяжения. На рисунке 1 приведены траектории падения двух капель магнитной жидкости в переменном магнитном поле, направленном вдоль вертикали. Как видно из рисунка, траектории движения имеют извилистый вид, обусловленный периодически изменяющейся силой магнитного взаимодействия.

Аналогичный вид имеют траектории движения капель магнитной жидкости в случае направления магнитного поля перпендикулярно движению (рис. 2). Однако в этом случае магнитные силы взаимодействия капель могут приводить к периодическому столкновению (в соответствии с частотой поля) с последующим отталкиванием, связанным, по-видимому, с наличием сил поверхностного натяжения.

**Обсуждение экспериментальных результатов.** Рассмотрим движение одной капли магнитной жидкости относительно другой в переменном магнитном поле. Если капля осциллирует по отношению к неподвижной среде, то в ней возникают течения, которые в свою очередь действуют на другую частицу. Таким образом, возникает гидродинамическое взаимодействие между осциллирующей и неподвижной каплями. Если обе капли осциллируют, то между ними возникает гидродинамическая сила, называемая силой Бьеркнесса [2]. Сила Бьеркнесса, возникающая между двумя колеблющимися каплями с одинаковыми радиусами $R$, центры которых расположены на

расстоянии $r$ и поверхности которых осциллируют с частотой $\omega$, равна:

$$F_B = 6\pi\rho\frac{R^6}{r^2}\omega^2. \tag{1}$$

По аналогии с результатами работы [2], в которой было рассмотрено действие электрического поля на диэлектрическую каплю, запишем зависимость эксцентриситета капли от напряженности магнитного поля в виде:

$$e = \sqrt{\frac{\mu_0 R}{4\sigma}}\frac{\chi}{1+\frac{\chi}{3}}H, \tag{2}$$

где $\sigma$ - коэффициент поверхностного натяжения капли. Пусть напряженность магнитного поля изменяется по закону

$$H = H_0 cos\omega t. \tag{3}$$

Тогда согласно [3] с учетом (3) выражение для магнитной силы, действующей на каплю может быть представлено в виде:

$$F_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{9\chi^2 V^2 H_0^2 cos^2\omega t}{(1+n\chi)^2 x^4}.$$

Окончательно, с учетом выражения для размагничивающего фактора $n$, для магнитной силы запишем:

$$F_m = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{9\chi^2 V^2 H_0^2 cos^2\omega t}{(1+\frac{\chi}{3}-\frac{2}{15}\chi e^2)^2 x^4}. \tag{4}$$

Уравнение движения в проекции на ось $x$ в случае, когда поле направлено вдоль направления движения капель примет вид:

$$m\frac{d\nu_x}{dt} = F_m - F_B, \tag{5}$$

Зависимость смещения капли по вертикали от времени найдем из уравнения движения в проекции на вертикальную ось $z$, которое запишем в виде:

$$mg - F_A - F_S = ma, \tag{6}$$

где $F_A$ - сила Архимеда, $F_S$ - сила Стокса.

Так как движение капли вдоль вертикали можно считать равномерным, то для смещения капли по оси $z$ возможно использование формулы:

$$z(t) = \frac{g(\rho-\rho_1)}{\rho}\tau_0 t, \tag{7}$$

где $\rho$ - плотность магнитной жидкости, $\rho_1$ - плотность среды (вода), $\tau_0$ - время релаксации, характеризующее процесс установления скорости оседания частицы в поле сил тяжести,

$$\tau_0 = \frac{m}{6\pi\eta R} = \frac{2}{9}\frac{\rho R^2}{\eta}. \tag{8}$$

Тогда, уравнение движения (6) примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\mu_0}{4\pi m}\frac{9\chi^2V^2H_0^2cos^2\omega t}{(1+\frac{\chi}{3}-\frac{2}{15}\chi e^2)^2x^4} - 6\pi\rho\frac{r^6}{mx^2}\omega^2. \quad (9)$$

Введем обозначения

$$c_1 = \frac{\mu_0}{4\pi m}\frac{9\chi^2V^2H_0^2}{(1+\frac{\chi}{3}-\frac{2}{15}\chi e^2)^2}, c_2 = 6\pi\rho\frac{r^6}{m}\omega^2, \quad (10)$$

и уравнение движения (9) представим в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{c_1cos^2\omega t}{x^4} - \frac{c_2}{x^2}. \quad (11)$$

Используя решение уравнения (11), полученное с помощью программы MathCAD и учитывая (8) найдем траеторию движения одной капли магнитной жидкости относительно другой, движущейся в переменном магнитном поле, направленном параллельно скорости движения. На рисунке 3 показана траектория движения капли магнитной жидкости в переменном магнитном поле, рассчитанная теоретически. Как видно из рисунка, расчетная траектория имеет, как и наблюдаемая визуально, извилистый вид.

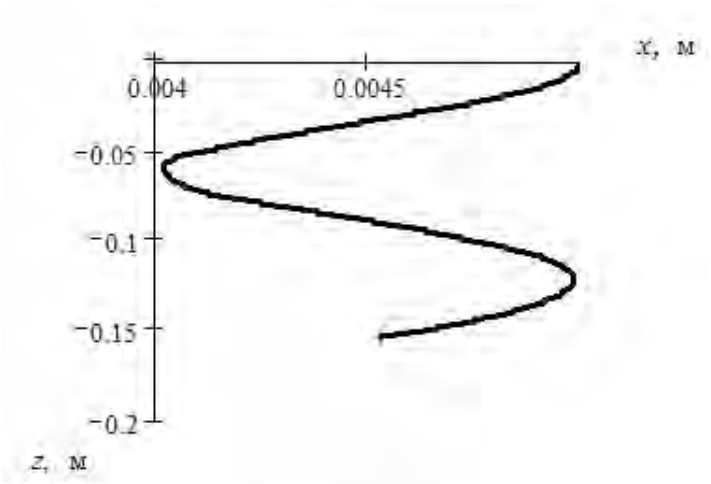



Рис. 3. Траектория движения капли магнитной жидкости относительно другой капли в переменном магнитном поле (направление движения параллельно направлению напряженности переменного магнитного поля).

Далее рассмотрим параллельное движение капель магнитной жидкости перпендикулярно направлению напряженности магнитного поля. В этом случае $F_B$ и $F_m$ имеют одинаковое направление, благодаря чему капли должны сближаться. Уравнение в проекции на ось $x$ для данного случая имеет вид:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu_0}{4\pi m}\frac{9\chi^2V^2H_0^2cos^2\omega t}{(1+\frac{\chi}{3}-\frac{2}{15}\chi e^2)^2x^4} - 6\pi\rho\frac{r^6}{mx^2}\omega^2. \quad (12)$$

Можно предположить, что если в момент столкновения капель мгновенное значение напряженности магнитного поля принимает нулевое значение, то возникающие в момент соударения силы отталкивания преобладают над силами притяжения, что и приводит к отталкиванию капель друг от друга, наблюдаемое в эксперименте. В последующие моменты времени магнитная сила, в соответствии с изменением напряженности

поля начинает увеличиваться, вследствие чего (а также постоянного действия гидродинамической силы притяжения) капли начинают вновь сближаться. Очевидно, что при таком механизме изменения траектории, время сближения капель должно равняться четверти периода переменного магнитного поля. По-видимому, этим и объясняется тот факт, что описанный характер совместного движения наблюдается только при определенной частоте переменного магнитного поля. Проведенный анализ полученных экспериментальных результатов указывает на возможность эффективного управления движением капель магнитной жидкости с помощью воздействия магнитных полей.

В заключении автор выражает благодарность профессору Ю. И. Диканскому за руководство настоящей работой.

# Список литературы

[1] *О.С. Копылова.* Материалы Всероссийской научной конференции студентов физиков 11. 2005. С. 260

[2] *Г.М. Панченков, Л.К. Цабек.* Поведение эмульсий во внешнем электрическом поле. М. 1969. С.49–114.

[3] *Э.Я. Блум, М.М. Майоров, А.О. Цеберс.* Магнитные жидкости. Рига. 1989. С. 179.

## К ИССЛЕДОВАНИЮ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СОСТАВЛЯЮЩЕЙ ТЕРМОФОРЕТИЧЕСКОЙ СКОРОСТИ ТВЕРДОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ

**М.К. Кузьмин**

Московский государственный областной университет, Москва, ул. Радио 10 а

Пусть рассматривается твердая аэрозольная частица сферической формы радиуса $R$, взвешенная в неоднородной по температуре вязкой несжимаемой газовой среде. На относительно большом удалении от частицы предполагается наличие во внешней газовой среде градиента температуры $[\nabla T(t)]_\infty$, где $t$ — время.

При этом считаем, что градиент температуры $[\nabla T(t)]_\infty$ представляется в виде суммы стационарного и строго нестационарного градиентов:

$$[\nabla T(t)]_\infty \;=\; (\nabla T_1)_\infty + [\nabla T_2(t)]_\infty,$$

где $(\nabla T_1)_\infty \;=\; \{[\nabla T(t)]_\infty\}_{|t\,=\,0}$, следовательно,

$$\{[\nabla T_2(t)]_\infty\}_{|t\,=\,0} \;=\; 0. \qquad (1)$$

Термофоретическая скорость частицы $\vec{u}_T(t)$ состоит также из стационарной и нестационарной составляющих: $\vec{u}_T(t) \;=\; \vec{u}_{1T} + \vec{u}_{2T}(t)$, где $\vec{u}_{1T} \;=\; \vec{u}_T(t)_{|t\,=\,0}$, следовательно, $\vec{u}_{2T}(t)_{|t\,=\,0} \;=\; 0$.

В статье [1], используя интегральное преобразование Лапласа [2] вида

$$F(\,p) \;=\; L\{f(\,t)\} \;=\; \int\limits_0^\infty f(\,t)e^{-pt}dt,$$

где $p$ — комплексный параметр, получена формула для определения нестационарной составляющей термофоретической скорости рассматриваемой частицы, записанная через изображения соответствующих величин:

$$U_2 \;=\; \frac{K_{Tsl}\nu}{T_0} F_U(p)\; F_\Theta(p)\; G_\infty(p), \tag{2}$$

где

$$F_U(p) \;=\; \frac{6\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu p}\right)}{2R^2\left(\rho_e - \rho_i\right)p + 9\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu p}\right)},$$

$$F_\Theta(p) \;=\; \frac{\kappa_e I_{3/2}\left(3K_{3/2} - 2R\sqrt{p/a_e}K'_{3/2}\right)}{2R\Delta_1}, \tag{3}$$

$$\Delta_1 \;=\; \frac{\kappa_e - \kappa_i}{2R} I_{3/2}\, K_{3/2} - \sqrt{p}\left(\frac{\kappa_e}{\sqrt{a_e}} I_{3/2}\, K'_{3/2} - \frac{\kappa_i}{\sqrt{a_i}} I'_{3/2}\, K_{3/2}\right),$$

$$U_2 \;=\; U_2(p) \;=\; L\{|\vec{u}_{2T}(\mathrm{t})|\}, \quad G_\infty(p) = \; L\{|[\nabla T_2(t)]_\infty|\}.$$

Далее, $K_{Tsl}$ — коэффициент теплового скольжения газа вдоль поверхности частицы [3], $\nu$ — кинематический коэффициент вязкости среды, $T_0$ — средняя температура газа и частицы, $\rho_e, \quad \rho_i$ — плотности газовой среды и вещества частицы соответственно. Здесь и далее будем снабжать индексами "$e$" и "$i$" величины, характеризующие одно и то же физическое свойство для областей, расположенных соответственно вне и внутри частицы, $\kappa_i, \quad \kappa_e$ — коэффициенты теплопроводности. В выражение (4) входят модифицированные функции Бесселя первого и второго рода $I_{3/2}$ и $K_{3/2}$, а также производные от них. Они зависят от параметра $p$ следующим образом

$$I_{3/2} \;=\; I_{3/2}(z_i), \quad I'_{3/2} \;=\; I'_{3/2}(z_i), \quad K_{3/2} \;=\; K_{3/2}(z_e), \quad K'_{3/2} \;=\; K'_{3/2}(z_e),$$

$$z_i \;=\; R\sqrt{p/a_i}, \quad z_e \;=\; R\sqrt{p/a_e},$$

где $a_i, \quad a_e$ — коэффициенты температуропроводности.

Ради упрощения формы записи в дальнейшем часто будем использовать обозначение неотрицательной функции $|[\nabla T_2(t)]_\infty|$ через $g_\infty(t)$. По этой же причине отношение положительных величин $\kappa_i/\kappa_e$ будем обозначать одной буквой $\kappa$. При этом безразмерную величину $\kappa$ будем называть относительной теплопроводностью (вещества) частицы.

Исследование нестационарной составляющей термофоретической скорости сферической аэрозольной частицы проводим с помощью приближенных формул для вычисления этой скорости при малых и больших значениях времени. С этой целью рассматриваем асимптотические приближения функции $F_\Theta(p)$ как при $p \to 0$, так и при $p \to \infty$:

$$F_\Theta(p) \simeq F_\Theta^{(a)}(p) \;=\; \frac{z_e^2 + 3z_e + 3}{z_e^2 + (\kappa+2)(z_e+1)} \quad (p \to 0),$$

$$F_\Theta(p) \simeq F_\Theta^{(b)}(p) \;=\; \frac{z_e^2 + 3z_e + 3}{z_e^2 + (z_e+1)[\kappa z_i + 2\,(1-\kappa)]} \quad (p \to \infty),$$

из которых можно получить соответствующие асимптотические приближения выражения (2), включая в последние приближения функции $F_U(p)$, $G_\infty(p)$ в неизменном виде.

Рассмотрим термофорез аэрозольной частицы, когда нестационарный градиент температуры задан с помощью функции, имеющей следующее аналитическое выражение

$$g_\infty(t) \;=\; |[\nabla T_2(t)]_\infty| \;=\; A\left(1 - e^{-\omega t}\right), \tag{4}$$

где $A$ и $\omega$ — положительные постоянные величины, имеющие размерности К/м , 1/с соответственно. Очевидно, что функция (4) удовлетворяет начальному условию (1). В рассматриваемом случае справедливы следующие асимптотические равенства

$$|\vec{u}_{2T}(\mathrm{t})| \simeq u_{01}(t) \quad (t \to 0), |\vec{u}_{2T}(\mathrm{t})| \simeq u_{02}(t) \quad (t \to 0)$$

$$|\vec{u}_{2T}(\mathrm{t})| \simeq u_\infty(t) \quad (t \to \infty),$$

где

$$u_{01}(t) \;= \frac{3K_{Tsl}\,\rho_e\,\nu\sqrt{\nu}A\omega t\sqrt{t}}{T_0 R|\rho_i - \rho_e|\left(1 + \kappa\sqrt{a_e/a_i}\right)} \times$$

$$\times\left\{\frac{4}{3\sqrt{\pi}} + \frac{\sqrt{t}}{4R}\left[\sqrt{\nu}\left(2 + \frac{9\rho_e}{\rho_i - \rho_e}\right) + 2\sqrt{a_e}\left(2 + \frac{2\kappa - 1}{1 + \kappa\sqrt{a_e/a_i}}\right)\right]\right\} \tag{5}$$

при $(\rho_i \neq \rho_e)$,

$$u_{02}(t) \;= \frac{2K_{Tsl}\;\nu A\omega t}{3T_0\left(1 + \kappa\sqrt{a_e/a_i}\right)}\left[1 + \frac{4}{3R}\sqrt{\frac{a_e t}{\pi}}\left(2 + \frac{2\kappa - 1}{1 + \kappa\sqrt{a_e/a_i}}\right)\right] \tag{6}$$

при $\rho_i = \rho_e$,

$$u_\infty(t) \;= \frac{2K_{Tsl}\;\nu A}{T_0(\kappa + 2)}\left\{1 + \frac{R^3}{3t\sqrt{\pi t}}\left[\frac{\kappa - 1}{2a_e\sqrt{a_e}(\kappa + 2)} + \frac{\rho_i - \rho_e}{3\rho_e\nu\sqrt{\nu}}\right]\right\}. \tag{7}$$

Отметим, что выражение (7) можно использовать при любом соотношении между $\rho_e$, $\rho_i$. Асимптотическое приближение (6) соответствует случаю, когда $\rho_i = \rho_e$. По его выражению видно, что на величину ускорения при малых значениях времени существенное влияние оказывает величина $\kappa\sqrt{a_e/a_i} = \dfrac{\kappa_i(c_p)_i}{\kappa_e(c_p)_e}$, где $c_p$ — удельная теплоемкость.

Приступим непосредственно к исследованию нестационарной составляющей термофоретической скорости по ее асимптотическим приближениям (5) и (7) для сфер, состоящих из конкретных материалов. Рассмотрим одиночные частицы сферической формы ($R = 10^{-5}$м), взвешенные в воздухе, состоящие из различных твердых веществ: золы древесного топлива, каменного угля, парафина, перлита марки 75 и речного песка. Определим значения физических величин, характеризующих интересующие нас свойства этих веществ и воздуха, при температуре $T_0 = 293\ K$ и давлении $P = 0,1$ МПа.

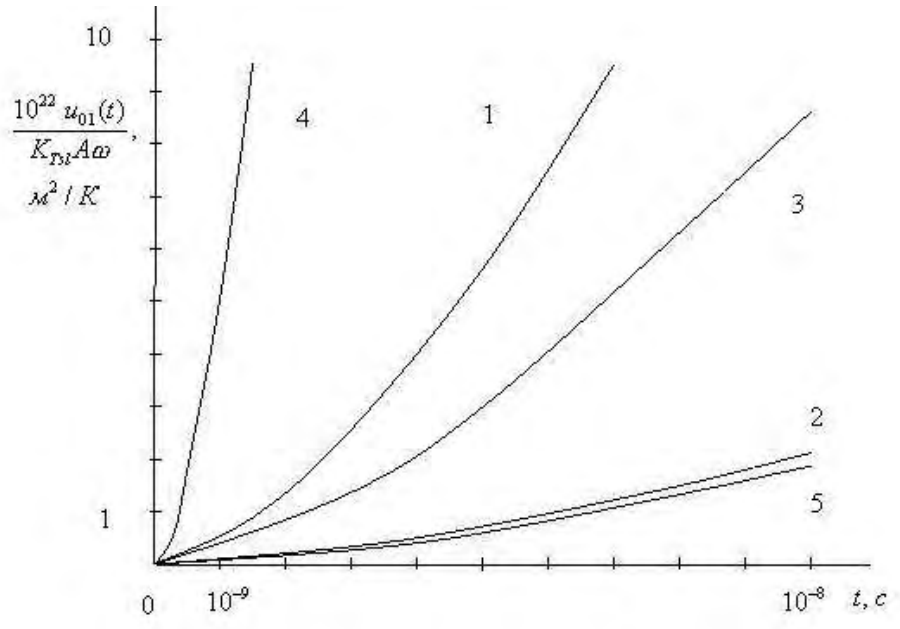



Рис. 1.

Используя формулу (5), построим графики, отражающие изменение скорости движения сферических частиц, состоящих из указанных выше материалов, при малых значениях времени (рис. 1). Линии 1–5 отражают изменение нестационарной составляющей термофоретической скорости сферической частицы, состоящей соответственно из следующих материалов: 1) золы древесного топлива, 2) каменного угля, 3) парафина, 4) перлита марки 75 и 5) речного песка при малых значениях времени.

Как видно из рисунка 1, движение сферических частиц при малых временах является ускоренным. Причем, ускорение существенно зависит от свойств вещества частицы. Представление об этой зависимости можно получить по результатам таблицы 1.

Табл. 1.

| № п/п | Вещество | $\frac{10^4\rho_e}{\rho_i-\rho_e}$ | $\frac{a_e}{a_i}$ | $\kappa\sqrt{\frac{a_e}{a_i}}$ | $\frac{10^{13}}{K_{Tsl}A\omega}\frac{du_{01}}{dt}\,\vert t=10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | Зола древесного топлива | 17,03 | 74,9 | 50,69 | 2,538 |
| 2 | Каменный уголь | 7,44 | 99,7 | 175,45 | 0,3246 |
| 3 | Парафин | 13,39 | 243,7 | 76,18 | 1,331 |
| 4 | Перлит марки 75 | 134,0 | 311,5 | 37,51 | 26,717 |
| 5 | Речной песок | 7,44 | 33,1 | 195,38 | 0,293 |

Из таблицы 1 видно, что величина ускорения сферической частицы при малых временах существенно зависит от плотности вещества частицы и величины $\kappa\sqrt{a_e/a_i}$.

Перейдем к исследованию термофоретической скорости сферической частицы при больших временах по асимптотическому приближению (7) функции $|\vec{u}_{2T}(\mathrm{t})|$ при $t \to \infty$. Для функции (4), задающей нестационарный градиент температуры, имеем

$$\lim_{t\to\infty} u_\infty(t) \;=\; \lim_{t\to\infty}|\vec{u}_{2T}(t)| \;=\; \frac{2K_{Tsl}\nu A}{T_0(\kappa+2)} \;=\; B. \tag{8}$$

Значение величины $B$ для различных частиц зависит от значения относительной теплопроводности вещества этих частиц. Дадим сравнительную картину изменения

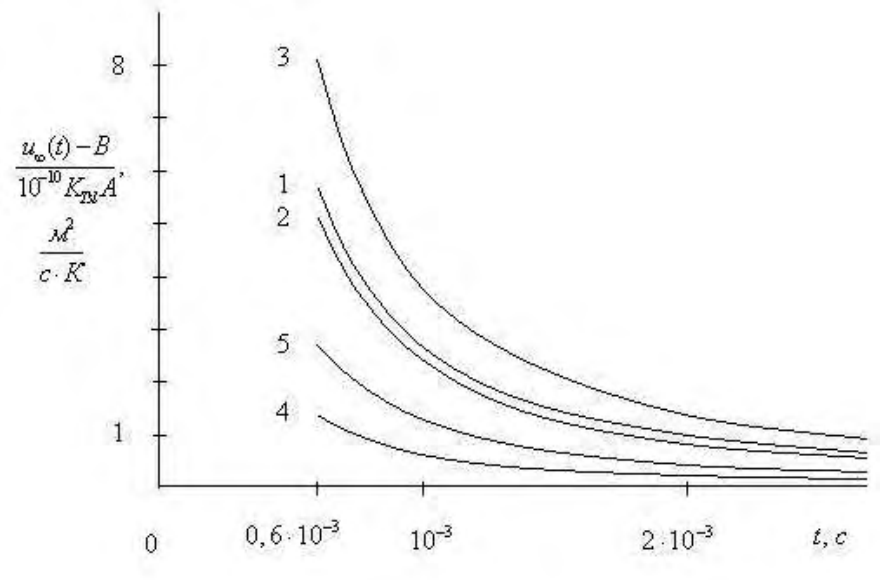



Рис. 2.

нестационарной составляющей термофоретической скорости для частиц, состоящих из разных веществ. Ради этого построим графики функций для них по выражению $u_\infty(t)$-$B$ (т. е. совмещаем все асимптоты с осью времени).

Из рисунка 2 видно, что в наших рассмотрениях значения функции $u_\infty(t)$ $(\forall t < \infty)$ больше величины $B$, определяемой формулой (8). Причем, на величину разности $u_\infty(t)$-$B$ оказывает заметное влияние плотность вещества частицы. Заметим, что величиной $B$ характеризуется основной вклад действия строго нестационарного градиента температуры на термофоретическую скорость частицы.

# Список литературы


[1] *Ю.И. Яламов, М.К. Кузьмин.* Вестник МГОУ. Труды ЦФНИ. 2006. №1. С. 23 – 33.

[2] *Г. Деч.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.

[3] *Ю.И. Яламов, В.С. Галоян.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.


## К АНАЛИЗУ ФОРМУЛ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕРМОФОРЕЗА СФЕРИЧЕСКОЙ ЧАСТИЦЫ


**М.К. Кузьмин, Ю.И. Яламов**

Московский государственный областной университет, Москва, ул. Радио 10 а


Гидродинамическая и тепловая задачи нестационарного термофореза крупной нелетучей сферической частицы в вязкой несжимаемой газовой среде рассматривались в

статьях [1, 2]. При этом предполагалось, что строго нестационарный процесс является непосредственным продолжением стационарного процесса термофореза, изученного достаточно подробно [3]. Исходя из такого предположения, определялись начальные и граничные условия этих задач. Каждая из задач была разбита на стационарную и строго нестационарную части. В результате решения стационарных частей этих задач получена окончательная формула для определения стационарной составляющей термофоретической скорости сферической частицы. При решении строго нестационарных частей использован метод интегральных преобразований Лапласа [4]. Для определения нестационарной составляющей термофоретической скорости этой частицы найдена соответствующая формула в пространстве изображений.

Настоящие материалы посвящены в основном исследованию найденной в пространстве изображений формулы для определения нестационарной составляющей термофоретической скорости крупной сферической частицы. В них выясняются асимптотические соотношения, существующие между скалярными функциями, определяющими соответственно строго нестационарный градиент температуры и нестационарную составляющую термофоретической скорости сферической частицы.

Пусть рассматривается крупная одиночная твердая частица сферической формы радиуса $R$, взвешенная в неоднородной по температуре вязкой несжимаемой газовой среде. На относительно большом удалении от частицы предполагается наличие во внешней газовой среде градиента температуры $[\nabla T(t)]_\infty$, где $t$ — время. При этом считаем, что градиент температуры $[\nabla T(t)]_\infty$ представляется в виде суммы стационарного и строго нестационарного градиентов: $[\nabla T(t)]_\infty = (\nabla T_1)_\infty + [\nabla T_2(t)]_\infty$, где $(\nabla T_1)_\infty = \{[\nabla T(t)]_\infty\}_{|t=0}$, следовательно, $\{[\nabla T_2(t)]_\infty\}_{|t=0} = 0$. Термофоретическая скорость частицы $\vec{u}_T(t)$ состоит также из стационарной и нестационарной составляющих:$\vec{u}_T(t) = \vec{u}_{1T} + \vec{u}_{2T}(t)$, где $\vec{u}_{1T} = \vec{u}_T(t)_{|t=0}$, следовательно, $\vec{u}_{2T}(t)_{|t=0} = 0$.

В статье [2] получена окончательная формула для определения стационарной составляющей термофоретической скорости сферической частицы

$$\vec{u}_{1T} = -\frac{2K_{Tsl}\nu\,\kappa_e}{T_0(\kappa_i + 2\kappa_e)}\ (\nabla T_1)_\infty\,, \tag{1}$$

где $K_{Tsl}$ — коэффициент теплового скольжения газа вдоль поверхности частицы [3], $\nu$ — кинематический коэффициент вязкости среды, $T_0$ — средняя температура газа и частицы, $\kappa_i$, $\kappa_e$ — коэффициенты теплопроводности вещества частицы и внешней газовой среды соответственно. Здесь и далее будем снабжать индексами "$i$" и "$e$" величины, характеризующие одно и то же физическое свойство для областей, расположенных соответственно внутри и вне частицы.

В статьях [1, 2] использовалось интегральное преобразование Лапласа [4] вида

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt,$$

где $p$ — комплексный параметр. Приведем из статьи [2] формулу для определения нестационарной составляющей термофоретической скорости рассматриваемой части-

цы, записанную через изображения соответствующих величин:

$$U_2 \;=\; \frac{K_{Tsl}\nu}{T_0} F_U(p)\; F_\Theta(p)\; G_\infty(p), \tag{2}$$

где

$$F_U(p) \;=\; \frac{6\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu p}\right)}{2R^2\left(\rho_e - \rho_i\right)p + 9\rho_e\left(\nu + R\sqrt{\nu p}\right)}, \tag{3}$$

$$F_\Theta(p) \;=\; \frac{\kappa_e I_{3/2}\left(3K_{3/2} - 2R\sqrt{p/a_e}K'_{3/2}\right)}{2R\Delta_1}, \tag{4}$$

$$\Delta_1 \;=\; \frac{\kappa_e - \kappa_i}{2R} I_{3/2}\, K_{3/2} - \sqrt{p}\left(\frac{\kappa_e}{\sqrt{a_e}} I_{3/2}\, K'_{3/2} - \frac{\kappa_i}{\sqrt{a_i}} I'_{3/2}\, K_{3/2}\right),$$

$$U_2 \;=\; U_2(p) \;=\; L\{|\vec{u}_{2T}(\mathrm{t})|\}, \quad G_\infty(p) = \; L\{|[\nabla T_2(t)]_\infty|\}.$$

Далее, $\rho_e, \quad \rho_i$ — плотности газовой среды и вещества частицы соответственно. В выражение (4) входят модифицированные функции Бесселя [5] первого и второго рода $I_{3/2}$ и $K_{3/2}$, а также производные от них. Они зависят от параметра $p$ следующим образом

$$I_{3/2} \;=\; I_{3/2}(z_i), \quad I'_{3/2} \;=\; I'_{3/2}(z_i), \quad K_{3/2} \;=\; K_{3/2}(z_e), \quad K'_{3/2} \;=\; K'_{3/2}(z_e),$$

$$z_i \;=\; R\sqrt{p/a_i}, \quad z_e \;=\; R\sqrt{p/a_e},$$

где $a_i, \quad a_e$ — коэффициенты температуропроводности.

Для получения точной формулы, описывающей зависимость нестационарной составляющей термофоретической скорости рассматриваемой частицы $\vec{u}_{2T}(t)$ от строго нестационарного градиента температуры $[\nabla T_2(t)]_\infty$, надо найти соответствующее равенству (2) соотношение в пространстве оригиналов. Отыскание оригинала правой части равенства (2) является весьма проблематичным из-за того, что сюда в качестве сомножителя входит довольно сложное выражение (4).

Полученная формула (2) позволяет провести анализ зависимости нестационарной составляющей термофоретической скорости частицы $\vec{u}_{2T}(t)$ от строго нестационарной части градиента температуры $[\nabla T_2(t)]_\infty$, как для малых, так и для больших значений времени. Заметим, что векторы $\vec{u}_{2T}(t)$ и $[\nabla T_2(t)]_\infty$ имеют противоположные направления.

Ради упрощения формы записи в дальнейшем часто будем использовать обозначение неотрицательной функции $|[\nabla T_2(t)]_\infty|$ через $g_\infty(t)$. По этой же причине отношение положительных величин $\kappa_i/\kappa_e$ будем обозначать одной буквой $\kappa$. При этом безразмерную величину $\kappa$ будем называть относительной теплопроводностью (вещества) частицы.

По выражениям (3), (4) находим соответственно

$$\lim_{p\to 0} F_U(p) \;=\; \frac{2}{3}, \quad \lim_{p\to 0} F_\Theta(p) \;=\; \frac{3}{\kappa + 2}. \tag{5}$$

Обратимся к теоремам о предельных значениях [4]. Применив к формуле (2) теорему о конечном значении с учетом соотношений (5), получаем предельное равенство

$$\lim_{t\to\infty}|\vec{u}_{2T}(\mathrm{t})| \;=\; \frac{2K_{Tsl}\,\nu}{T_0\,(\kappa+2)}\lim_{t\to\infty} g_\infty(\mathrm{t}), \tag{6}$$

справедливое при любом соотношении между $\rho_e, \quad \rho_i$. В силу равенства (6) имеем

$$\lim_{t\to\infty}\vec{u}_{2T}(\mathrm{t}) \;=\; -\frac{2K_{Tsl}\,\nu}{T_0\,(\kappa+2)}\lim_{t\to\infty}\left[\nabla T_{2e}(t)\right]_\infty. \tag{7}$$

Отметим, что формулы (1) и (7) описывают одинаковую зависимость стационарных и строго нестационарных величин скорости и градиента температуры.

В дальнейшем, рассматривая пределы при $p\to\infty$, приходится различать случаи $\rho_e-\rho_i\neq 0$, $\rho_e-\rho_i\;=0$. Дело в том, что функция (3), существенно зависящая от $p$ при $\rho_e-\rho_i\neq 0$, тождественно равна постоянной величине при $\rho_e-\rho_i\;=0$.

Применив к соотношению (2) при $\rho_e-\rho_i\;=0$ теорему о начальном значении, получим следующее предельное равенство

$$\lim_{t\to 0}|\vec{u}_{2T}(\mathrm{t})| \;=\; \frac{2K_{Tsl}\,\nu}{3T_0\left(1+\kappa\sqrt{a_e/a_i}\right)}\lim_{t\to 0} g_\infty(t). \tag{8}$$

Если $\rho_e-\rho_i\neq 0$, то рассматриваем преобразованное выражение правой части соотношения (2):

$$U_2 \;=\; \frac{K_{Tsl}\,\nu}{T_0}[\sqrt{p}F_U(p)]\;F_\Theta(p)\;\left[\frac{1}{\sqrt{p}}G_\infty(p)\right].$$

Применив к последнему соотношению теорему о начальном значении с учетом значений надлежащих пределов, получаем

$$\lim_{t\to 0}|\vec{u}_{2T}(\mathrm{t})| \;=\; \frac{3K_{Tsl}\,\rho_e\,\nu\sqrt{\nu}}{T_0|\rho_e-\rho_i|\left(1+\kappa\sqrt{a_e/a_i}\right)}\lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}}*g_\infty(t)\right]. \tag{9}$$

Отметим, что в обеих частях соотношения (9) рассматриваются пределы неотрицательных величин. Равенство (9) возможно только тогда, когда разность плотностей $\rho_e, \quad \rho_i$ берется по абсолютной величине.

Выясним асимптотические соотношения, существующие между функциями $|\vec{u}_{2T}(t)|$ и $g_\infty(t)$. Из равенств (6) имеем, что эти функции при $t\to\infty$ асимптотически пропорциональны или, допуская некоторую вольность речи, можно сказать, что нестационарная составляющая термофоретической скорости сферической частицы и строго нестационарный градиент температуры имеют один и тот же порядок при больших значениях времени (независимо от соотношения между $\rho_e, \quad \rho_i$). Равенство (8), справедливое при $\rho_e-\rho_i\;=0$, позволяет заключить, что функции $|\vec{u}_{2T}(t)|$, $g_\infty(t)$ при $t\to 0$ имеют один и тот же порядок, если $\rho_e-\rho_i\;=0$. При $\rho_e-\rho_i\neq 0$ имеет место равенство (9), следовательно, $|\vec{u}_{2T}(t)|$ является функцией более высокого порядка малости чем $g_\infty(t)$, то есть $|\vec{u}_{2T}(t)| \;=\; o[g_\infty(t)] \quad (t\to 0)$. Отметим, что если, например, $g_\infty(t)$ является бесконечно малой порядка $n$ при $t\to 0$ , то $|\vec{u}_{2T}(t)|$ будет бесконечно малой порядка $q \;=\; 1+\frac{1}{2n}$ относительно $g_\infty(t)$.

Предельные равенства (6) — (9) дают информацию также о факторах, влияющих на величину скорости $\vec{u}_{2T}(t)$ при больших и малых значениях времени. Из формулы (7) следует, что при больших значениях времени нестационарная составляющая термофоретической скорости частицы определяется не только строго нестационарным градиентом температуры, а также зависит от величины относительной теплопроводности частицы. Если рассматривать две одиночные сферические частицы, относительные теплопроводности которых $\kappa_1$, $\kappa_2$ различны и $\kappa_1 < \kappa_2$, то согласно формуле (7) при одном и том же градиенте температуры $[\nabla T_{2e}(t)]_\infty$ для больших значений времени нестационарная составляющая термофоретической скорости первой сферы будет больше аналогичной величины для второй сферы. Равенства (8) и (9) показывают, что при малых значениях времени величина $\vec{u}_{2T}(t)$ существенно зависит как от соотношения между $\rho_e, \quad \rho_i$, а также от значения величины $\kappa\sqrt{a_e/a_i}$.

Отметим, что нами подробно исследован нестационарный термофорез в случае, когда строго нестационарный градиент температуры задан аналитическим выражением, таким, что с возрастанием значений времени этот градиент стремится к постоянному вектору. В этом случае получены удобные для вычисления нестационарной составляющей термофоретической скорости сферической частицы приближенные формулы, записанные через исходные физические величины. Анализ нестационарной составляющей термофоретической скорости сферической частицы по этим формулам проведен с привлечением численных значений, определяющих теплофизические и другие характерные свойства вещества твердых сфер, рассматриваемых в воздухе.

В результате всего проведенного исследования выявлены закономерности изменения нестационарной составляющей термофоретической скорости крупной твердой сферической частицы и факторы, влияющие на это изменение в вязкой газовой среде, в которой задан нестационарный градиент температуры.

# Список литературы


[1] *Ю.И. Яламов, М.К. Кузьмин.* Вестник МГОУ. Труды ЦФНИ. 2006. №1. С. 13 – 22.

[2] *Ю.И. Яламов, М.К. Кузьмин.* Вестник МГОУ. Труды ЦФНИ. 2006. №1. С. 23 – 33.

[3] *Ю.И. Яламов, В.С. Галоян.* Динамика капель в неоднородных вязких средах. Ереван: Луйс, 1985. 208 с.

[4] *Г. Деч.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука, 1971. 288 с.

[5] *Б.Г. Коренев.* Введение в теорию бесселевых функций. М.: Наука, 1971. 288 с.

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МАССОВОЙ СКОРОСТИ И ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФЕРМИ-ГАЗА В ЗАДАЧЕ О ТЕПЛОВОМ СКОЛЬЖЕНИИ

**Н.Н. Любимова**

МГОУ, г. Москва, ул. Радио, д. 10 а

Выведено распределение массовой скорости ферми-газа в полупространственной задаче о тепловом скольжении. В явном виде получена функция распределения летящих к стенке частиц.

**Постановка задачи и основные уравнения.** В работе [1] было предложено новое кинетическое уравнение, описывающее поведение ферми - газов (см. [2]) для задач о тепловом скольжении:

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x}+g_T\left(\mu^2-\frac{5}{2}\gamma(\alpha)\right)+h(x,\mu,\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\mu',\alpha)h(x,\mu',\alpha)d\mu' \tag{1}$$

Здесь $\gamma(\alpha)=\frac{\int\limits_0^\infty \mu'^3 f_0(\alpha-\mu'^2)d\mu'}{\int\limits_0^\infty \mu'^3 f_0'(\alpha-\mu'^2)d\mu'}$, $f_0=\frac{1}{\exp(\mu^2-\alpha)+1}$, $f_0{}'=\frac{\exp(\mu^2-\alpha)}{(\exp(\mu^2-\alpha)+1)^2}$,

$K(\mu,\alpha)=\frac{\ln[1+\exp(\alpha-\mu^2)]}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\ln[1+\exp(\alpha-\mu^2)]d\mu}$, $g_T=\frac{G_T}{T_0}$, $G_T$ – градиент температуры.

Разложим функцию $h(x,c)$ по двум ортогональным направлениям:

$$h(x,c)=\psi(x,c_x)+(c_y^2+c_z^2-\gamma(\alpha))\psi_1(x,c_x).$$

Тогда уравнение (1) эквивалентно системе из двух уравнений:

$$\begin{cases}\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+g_T(\mu^2-\frac{1}{2}\gamma(\alpha))+\psi(x,\mu,\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\mu,\alpha)\psi(x,\mu,\alpha)d\mu,\\ \mu\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+g_T+\psi_1(x,\mu,\alpha)=0.\end{cases}$$

Нетрудно проверить, что функция $\tilde{\psi}=-g_T(\mu^2-\frac{1}{2}\gamma(\alpha))$ – есть частное решение первого уравнения системы. Зная частное решение далее можно рассматривать соответствующее однородное уравнение:

$$\mu\frac{\partial\psi}{\partial x}+\psi(x,\mu,\alpha)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\mu,\alpha)\psi(x,\mu,\alpha)d\mu \tag{2}$$

**Аналитическое решение задачи.** Задача о тепловом скольжении газа при условии полного диффузного отражения ферми-частиц от стенки состоит (см. [3]) в решении (2) с граничными условиями:

$$\psi(0,\mu,\alpha)=0,\quad \mu>0,$$

$$\psi(x,\mu,\alpha)=U_0(\alpha)-g_T(\mu^2-\frac{\gamma(\alpha)}{2}),\quad x\to+\infty,\quad \mu<0.$$

Здесь $U_0(\alpha)$ - искомая безразмерная скорость скольжения, $g_T$ - известный логарифмический градиент температуры.

Решение задачи будем искать в виде следующего разложения по собственной функции характеристического уравнения:

$$\psi(x,\mu,\alpha) = U_0(\alpha) + g_T\left(\mu^2 - \frac{\gamma(\alpha)}{2}\right) + \int\limits_0^\infty \exp(-\frac{x}{\eta})\Phi(\eta,\mu,\alpha)a(\eta,\alpha)d\eta, \qquad (3)$$

где $U_0(\alpha)$ и $a(\eta,\alpha)$ неизвестные постоянная и функция,

$$\Phi(\eta,\mu,\alpha) = \eta P\frac{1}{\eta-\mu} + \lambda(\eta,\alpha)\delta(\eta-\mu),$$

$\lambda(z,\alpha)$ – дисперсионная функция:

$$\lambda(z,\alpha) = 1 + z\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K(u,\alpha)}{u-z}du.$$

Подставим разложение (3) в граничное условие на стенке, приходим к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши:

$$U_0(\alpha) - g_T\left(\mu^2 - \frac{\gamma(\alpha)}{2}\right) + \int\limits_0^\infty \frac{\eta a(\eta)}{\eta-\mu}d\eta + \frac{\lambda(\mu)}{K(\mu)}a(\mu) = 0, \quad \mu > 0\,.$$

Введем вспомогательную функцию:

$$N(z,\alpha) = \int\limits_0^\infty \frac{\eta a(\eta,\alpha)}{\eta - z}d\eta$$

и сведем сингулярное уравнение к краевой задаче Римана [4]:

$$\begin{array}{l}\lambda^+(\mu,\alpha)[U_0(\alpha) - g_T(\mu^2 - \frac{\gamma(\alpha)}{2}) + N^+(\mu,\alpha)] = \\ = \lambda^-(\mu,\alpha)[U_0(\alpha) - g_T(\mu^2 - \frac{\gamma(\alpha)}{2}) + N^-(\mu,\alpha)]\end{array}, \quad \mu > 0\,.$$

Соответствующая краевая задача:

$$\frac{X^+(\mu,\alpha)}{X^-(\mu,\alpha)} = \frac{\lambda^+(\mu,\alpha)}{\lambda^-(\mu,\alpha)}, \quad \mu > 0\,.$$

имеет (см., например, [3]) следующее, ограниченное в нуле решение:

$$X(z,\alpha) = \frac{1}{z}\exp V(z,\alpha), \qquad V(z,\alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\zeta(u,\alpha)}{u-z}du.$$

Здесь $\zeta(\tau,\alpha) = \theta(\tau,\alpha) - \pi$, $\theta(\tau,\alpha)$ – непрерывная регулярная ветвь аргумента функции $\lambda^+(\tau,\alpha)$, фиксированная в нуле условием $\theta(0,\alpha) = 0$.

Вернемся к краевой задаче Римана и преобразуем ее следующим образом:

$$\begin{array}{l} X^+(\mu,\alpha)[U_0(\alpha)-g_T(\mu^2-\frac{\gamma(\alpha)}{2})+N^+(\mu,\alpha)]= \\ =X^-(\mu,\alpha)[U_0(\alpha)-g_T(\mu^2-\frac{\gamma(\alpha)}{2})+N^-(\mu,\alpha)] \end{array}, \quad \mu>0\,.$$

Эта задача имеет общее решение:

$$N(z,\alpha)=-U_0(\alpha)+g_T\left(z^2-\frac{\gamma(\alpha)}{2}\right)+\frac{C_0(\alpha)+C_1(\alpha)z}{X(z)}\,,$$

где $C_0(\alpha), C_1(\alpha)$ - неизвестные постоянные. Чтобы это решение можно было принять в качестве вспомогательной функции $N(z,\alpha)$, введенной выше, потребуем, чтобы общее решение обладало свойством $N(\infty,\alpha)=0$. При этом получаем, что

$$C_1(\alpha)=-g_T,\quad C_0(\alpha)=-g_TV_1(\alpha),\quad V_n(\alpha)=-\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty u^{n-1}\zeta(u,\alpha)du,\quad n=1,2$$

Скорость теплового скольжения $u_0(\alpha)$ можно представить в виде:

$$U_0(\alpha)=K_T(\alpha)g_T, \tag{4}$$

где $K_T$ - искомый коэффициент теплового скольжения.

$$K_T(\alpha)=\frac{1}{2}V_1^2(\alpha)+V_2(\alpha)-\frac{1}{2}\gamma(\alpha). \tag{5}$$

Из формулы Сохоцкого для $N(z,\alpha)$ найдем неизвестную функцию $a(\eta,\alpha)$ разложения (3):

$$\eta a(\eta,\alpha)=-g_T\frac{V_1+\eta}{2\pi i}\left[\frac{1}{X^+(\eta,\alpha)}-\frac{1}{X^-(\eta,\alpha)}\right]=g_T\frac{V_1+\eta}{\pi}\frac{\sin\zeta(\eta)}{X(\eta)} \tag{6}$$

Таким образом, все неизвестные коэффициенты разложения (3) найдены (4) и (6).

**Массовая скорость и функция распределения.** Построим распределение массовой скорости. По определению имеем

$$U(r)=\frac{1}{n(r)}\int Vfd^3v,$$

тогда профиль безразмерной массовой скорости равен

$$U_y(x)=\frac{3}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\mu,\alpha)\psi(x,\mu,\alpha)d\mu \tag{7}$$

Подставляя (3) в (7) при условии нормировки

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(\mu,\alpha)\Phi(\eta,\mu,\alpha)d\mu\equiv 1$$

получим

$$U_y(x) = U_0(\alpha) + \frac{3}{8}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta)d\eta \tag{8}$$

Подставляя (4) и (6) в (8), после некоторых преобразований получим:

$$\frac{U_y(x)}{g_T} = K_T - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-x/\eta)\left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}\right]\frac{V_1+\eta}{\eta}d\eta \tag{9}$$

$$\frac{U_y(x)}{g_T} = K_T + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} \exp(-x/\eta)\frac{(V_1+\eta)\sin\zeta(\eta)}{\eta X(\eta)}d\eta.$$

Интеграл из правой части (9) при $x = 0$ можно вычислить аналитически [3]. Для этого воспользуемся интегральным представлением

$$\frac{1}{X(z)} - z + V_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}\right]\frac{d\eta}{\eta - z} \tag{10}$$

Устремляя в (10) $z \to 0$ вдоль отрицательной части действительной оси, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}\right]\frac{d\eta}{\eta} = \frac{1}{X(-0)} + V_1\,. \tag{11}$$

Найдем скорость теплового скольжения газа у стенки. Представим равенство (9) в виде

$$\frac{U_y(x)}{g_T} = K_T - \frac{V_1(\alpha)}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}]\frac{d\eta}{\eta} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}]d\eta. \tag{12}$$

Значение первого интеграла из правой части (12) равно (11). Второй интеграл из (12) определяется равенством

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{0}^{\infty}\left[\frac{1}{X^+(\eta)} - \frac{1}{X^-(\eta)}\right]d\eta = V_2(\alpha) - \frac{1}{2}V_1^2(\alpha) \tag{13}$$

Подставляя (11) и (13) в правую часть (12), получаем:

$$U_y(0) = g_T\left(\frac{V_1(\alpha)}{\sqrt{2}} - \frac{\gamma(\alpha)}{2}\right)\,.$$

Полученная формула представляет скорость газа непосредственно у стенки в задаче о тепловом скольжении.

Подставляя (4) и (6) в (3), после некоторых преобразований получим:

$$\begin{gathered}\frac{\psi(x,\mu,\alpha)}{g_T} = \frac{1}{2}V_1^2 + V_2 - \mu^2 + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\exp(-\frac{x}{\eta})\frac{(V_1+\eta)\sin\zeta(\mu)}{X(\eta)}\frac{d\eta}{\eta-\mu} + \\ + \frac{(V_1+\mu)\cos\zeta(\mu)}{X(\mu)}H_+(\mu)\exp(-\frac{x}{\eta}),\end{gathered} \tag{14}$$

где

$$H_+(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu > 0 \\ 0, & \mu < 0 \end{cases} .$$

Формулу (14) удобно использовать для построения профиля функции распределения в полупространстве.

Из формул (6) и (14) при $x = 0$ имеем:

$$\frac{\psi(0,\mu,\alpha)}{g_T} = (V_1 + \mu)\frac{H_+(\mu)\cos\zeta(\mu) - \cos\zeta_+(\mu)}{X(\mu)} \tag{15}$$

Из соотношения (15) при $\mu < 0$ находим функцию распределения летящих к стенке молекул:

$$\frac{\psi(0,\mu)}{g_T} = -\frac{V_1 + \mu}{X(\mu)} .$$

При $\mu > 0$ из равенства (15) находим $\psi(0,\mu) = 0$ , что совпадает с исходным граничным условием.

**Заключение.** Итак, в настоящей работе решена граничная задача для квантовых газов. Найдено распределение массовой скорости ферми-газа в полупространственной задаче о тепловом скольжении. Вычислены выражения для массовой скорости как на границе слоя, так и на стенке. В явном виде получена функция распределения летящих к стенке частиц.

# Список литературы


[1] *А.В. Латышев, А.А. Юшканов.* Граничные задачи для квантового ферми-газа. ТМФ. 2001. Т.129. № 3 С. 491–502.

[2] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976.

[3] *А.В. Латышев, А.А. Юшканов.* Кинетические уравнения типа Вильямса и их точные решения. М.: МГОУ. 2005. 273 с.

[4] *Ф.Д. Гахов.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.


## О НЕКОТОРЫХ ОСОБЕННОСТЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ВЗВЕШЕННЫХ НАГРЕТЫХ ЧАСТИЦ В НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ВЯЗКИХ ГАЗООБРАЗНЫХ И ЖИДКИХ СРЕДАХ


**Н.В. Малай, К.С. Рязанов**

Белгородский государственный университет, 308015, Белгород, ул. Победы, 85


Для описания движения взвешенных в вязкой среде частиц решается довольно сложная система уравнений гидродинамики и тепло-массопереноса. Вследствие общей их нелинейной природе получить точные решения не преставляется возможным, т.е. общего метода построения решений нелинейных дифференциальных уравнений для вязкой неизотермической среды (газ или жидкость) не существует. В механике сплошных сред были разработаны приближенные методы, позволяющие в той или иной мере

упростить полную систему уравнений и приспособить ее к характеру отдельных типов конкретных задач. Большинство конкретных задач о движении вязкой неизотермической среды, имеющих тот или иной практический интерес, решено именно на основании приближенных уравнений движения вязкой неизотермической среды, получаемых из полных уравнений с помощью отдельных упрощений. Одним из таких эффективных приближенных методов основан на анализе полных уравнений движения представленных в безразмерных величинах. В этом случае появляются так называемые характеристические числа (число Рейнольдса, число Эйлера, число Пекле и т.д.) малость которых позволяет упростить полную систему уравнений.

В задачах связанных с описанием движения нагретых частиц, т.е. когда относительные перепады температуры значительные, решение приближенных уравнений вязкой неизотермической среды, как показали исследования [1, 2], наиболее эффективно искать в виде обобщенных степенных рядов. Под относительным перепадом температуры понимается разность температур между средней температурой поверхности частицы $T_S$ и областью вдали от нее $T_{e\infty}$. Относительный перепад температуры считается малым, если $(T_S - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$ и значительным, если $(T_S - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim O(1)$. В последнем случае частица считается нагретой и при решении уравнений газовой динамики и теплопереноса необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса от температуры. Здесь и далее индексы "$e$" и "$i$" будем относить соответственно к газообразной сред и частице; индексом "$\infty$" - обозначены параметры газа на бесконечности.

В качестве примера рассмотрим классическую задачу обтекания равномерно нагретой неподвижной твердой частицы сферической формы плоскопараллельным потоком со скоростью $\mathbf{U_{e\infty}}$ в положительном направлении оси z. В случае обтекания вязкой несжимаемой жидкостью эта задача описывается следующей системой уравнений [3]:

$$\frac{\partial P_e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu_e\left(\frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k}\right)\right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\rho_e U_i^e\right) = 0 \tag{1}$$

$$div\left(\lambda_e \nabla T_e\right) = 0 \tag{2}$$

с граничными условиями [3]:

$$r = R, \qquad T_e = T_S, \qquad U_r^e = 0, \qquad U_\theta^e = 0 \tag{3}$$

$$r \to \infty, \qquad \mathbf{U_e} = U_{e\infty}\cos\theta\,\mathbf{e_r} - U_{e\infty}\sin\,\mathbf{e}_\theta, \qquad P_e = P_{e\infty}, \qquad T_e = T_{e\infty} \tag{4}$$

Здесь $R$ - радиус частицы; $U_{e\infty} = \mid \mathbf{U_{e\infty}} \mid$ - величина скорости набегающего потока; $x_k$ - декартовые координаты; $\mathbf{e_r}$ и $\mathbf{e}_\theta$ -единичные векторы сферической системы координат; $\rho_e$, $\lambda_e$ и $\mu_e$ - плотность, теплопроводность и динамическая вязкость жидкости; $U_r^e$ и $U_\theta^e$ - радиальная и касательная компоненты массовой скорости $\mathbf{U_e}$ в сферической системе координат.

В граничных условиях (представленных в сферической системе координат $r$, $\theta$, $\varphi$) на поверхности частицы (3) приняты условия прилипания для нормальной и касательной компонент массовой скорости и постоянства температуры. В качестве граничных условий на бесконечности, т.е. вдали от частицы, взяты условия (4).

Из всех параметров переноса жидкости только коэффициент вязкости наиболее сильно зависит от температуры, причем вязкость жидкости уменьшается с температурой по экспоненциальному закону [4]. Анализ имеющихся полуэмпирических формул и экспериментальных данных показал, что для учета зависимости динамической вязкости от температуры формула (5) позволяет наилучшим образом описать изменение вязкости жидкости в широком интервале температур с любой необходимой точностью (при $F_n = 0$ эту формулу можно свести к известному соотношению Рейнольдса [4]):

$$\mu_e = \mu_\infty \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n (\frac{T_e}{T_\infty} - 1)^n\right] exp\left\{-A\left(\frac{T_e}{T_\infty} - 1\right)\right\} \tag{5}$$

Здесь $A$ и $F_n$ - постоянные; например, для воды с относительной погрешностью, не превышающей 2 % коэффициенты $A = 5.779$ $F_1 = 2.318$ и $F_2 = 9.118$ в интервале температур от 273 до 363 К при $T_{e\infty} = 273$ К.

В случае обтекания вязкой газообразной средой эта задача описывается системой уравнений [3]:

$$\frac{\partial P_e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu_e\left(\frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial U_m^e}{\partial x_m}\right)\right\},\ \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho_e U_k^e\right) = 0 \tag{6}$$

$$div\left(\lambda_e \nabla T_e\right) = 0, \tag{7}$$

с теми же самыми граничными условиями.

При решении задачи в этом случае необходимо учитывать сжимаемость газообразной среды $\rho = \rho_{e\infty}/t_e$ и степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса вязкости ($\mu$) и теплопроводности ($\lambda$) от температуры следующим образом [4]: $\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^\beta$, $\lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^\alpha$, где $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$, $0 \lesssim \alpha,\beta \lesssim 1$, $t_e{=}T_e/T_{e\infty}$.

Определяющими параметрами как в первой, так и во второй задаче являются материальные постоянные $\rho_{e\infty}$, $\mu_{e\infty}$, $\lambda_{e\infty}$ и сохраняющиеся в процессе движения твердой сферической частицы R, $T_{e\infty}$, $U_{e\infty}$. Из этих параметров можно составить число Рейнольдса $Re_\infty{=}(\rho_{e\infty} R U_{e\infty})/\mu_{e\infty} \ll 1$.

Обезразмерим уравнения и граничные условия введя безразмерную координату и скорость следующим образом: $y_k = x_k/R$, $\mathbf{V_e}{=}\mathbf{U_e}/U_\infty$. При числах Рейнольдса $Re_\infty = (\rho_e U_{e\infty} R)/\mu_{e\infty} \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, поэтому решение уравнений газовой динамики и теплопереноса следует искать в виде разложения по числу Рейнольдса.

$$\mathbf{V_e} = \mathbf{V_e^{(0)}} + \varepsilon\ \mathbf{V_e^{(1)}} + ...,\quad t_e = t_e^{(0)} + \varepsilon\ t_e^{(1)} + ...,\quad (\varepsilon = Re_\infty) \tag{8}$$

Сила, действующая на частицу, находится интегрированием тензора вязких напряжений по поверхности частицы [3]. При нахождении силы сопротивления ограничимся поправками первого порядка малости.

Вид граничных условий вдали от частицы указывает на то, что решение в нулевом приближении для компонент скорости следует искать в виде

$$V_r(y,\theta) = G(y)\cos\theta,\quad V_\theta(y,\theta) = -g(y)\sin\vartheta \qquad (y = r/R) \tag{9}$$

В качестве примера рассмотрим равномерно нагретую сферу в газе. Интегрируя уравнение теплопроводности (7) и, учитывая соответствующие граничные условия, имеем следующее выражение для распределения температуры в окрестности нагретой сферы:

$$t_{eo}(y) = \left(1 + \frac{\Gamma_o}{y}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \tag{10}$$

где $\Gamma_o = t_S^{1+\alpha} - 1$.

Подставляя (10) в уравнения (6), учитывая (9) в конечном итоге получаем следующее дифференциальное уравнение для определения функции $G(y)$:

$$\frac{d^3G}{dy^3} + \frac{1}{y}\big(4 + \gamma_1\ell\big)\frac{d^2G}{dy^2} - \frac{1}{y^2}\big(4 + \gamma_2\ell - \gamma_3\ell^2\big)\frac{G}{dy} - \frac{2-\ell}{y^3}\gamma_3\ell^2 G = -\frac{D}{y^4 t_{eo}^{\beta}}, \tag{11}$$

с краевыми условиями

$$G\,|_{y=1} = 0, \qquad G\,|_{y\to\infty} \to 1 \tag{12}$$

Здесь $\gamma_1 = \dfrac{1-\beta}{1+\alpha}$, $\gamma_2 = 2\dfrac{1+\beta}{1+\alpha}$, $\gamma_3 = \dfrac{2+2\alpha-\beta^2}{1+\alpha}$, $\ell = \dfrac{\Gamma_o}{y+\Gamma_o}$, D - const.

Функия $G(y)$ связана с функцией $g(y)$, входящей в (9) соотношением $g(y) = G(y) + \dfrac{1}{2}y(\dfrac{dG}{dy} + \dfrac{\ell\ G}{y(1+\alpha)})$, которое получается из уравнения непрерывности.

Решение уравнения (11) будем искать в виде обобщённого степенного ряда [5]. Найдём сначала решение однородного уравнения (11):

$$\frac{d^3G}{dy^3} + \frac{1}{y}\big(4 + \gamma_1\ell\big)\frac{d^2G}{dy^2} - \frac{1}{y^2}\big(4 + \gamma_2\ell - \gamma_3\ell^2\big)\frac{G}{dy} - \frac{2-\ell}{y^3}\gamma_3\ell^2 G = -\frac{D}{y^4 t_{eo}^{\beta}}, \tag{13}$$

Точка y = 0 для однородного уравнения (13) является регулярной особой точкой [3,5]. Определяющее уравнение имеет вид $\rho\big(\rho+3\big)\big(\rho-2\big) = 0$ и его корни соответственно $\rho_1 = -3, \quad \rho_2 = 2, \quad \rho_3 = 0$.

Большему из корней отвечает решение

$$G_1 = \frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}\ell^n, \quad C_0^{(1)} = 1 \tag{14}$$

Второе решение однородного уравнения (13), линейно независимое с решением $G_1$ (конечное при $y \to \infty$), ищем в виде:

$$G_3 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(3)}\ell^n + \omega_3 \ln y \frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}\ell^n \tag{15}$$

Здесь $C_0^{(3)} = 1$, $C_1^{(3)} = 0$, $C_2^{(3)} = \dfrac{\gamma_3}{4}$, $C_3^{(3)} = 1$, $\dfrac{\omega_3}{2\Gamma_0^3} = -\dfrac{\gamma_3}{108}(10 + 3\gamma_1 + \gamma_2)$.

Подберём аналитическую функцию $G_2$ так, чтобы она была решением неоднородного уравнения (11). Вид уравнения указывает на то, что функцию $G_2$ следует искать в виде:

$$G_2 = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(2)}\ell^n + \omega_2 \ln y \frac{1}{y^3}\sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(1)}\ell^n, \tag{16}$$

где $C_0^{(2)}=1$, $C_1^{(2)}=-\dfrac{1}{8}(2\gamma_1+\gamma_2+6\omega_o)$, $C_2^{(2)}=1$, $\omega_o=\dfrac{\beta}{1+\alpha}$,
$\dfrac{\omega_2}{\Gamma_0^2}=-\dfrac{1}{15}[(8+6\gamma_1+2\gamma_2)C_1^2-3\gamma_1-3\omega_o(\omega_o-1)]$

Коэффициенты $C_n^{(1)}$ $\left(n\geqslant 1\right)$, $C_n^{(2)}$ $\left(n\geqslant 3\right)$ и $C_n^{(3)}$ $\left(n\geqslant 4\right)$ определяются при подстановке (14), (15), (16) в соответствующие дифференциальные уравнения и имеют следующий вид:

$$C_n^{(1)}=\frac{1}{n(n+3)(n+5)}\{[(n-1)(3n^2+13n+8)+\gamma_1(n+2)(n+3)+\gamma_2(n+$$
$$+2)]C_{n-1}^{(1)}-[(n-1)(n-2)(3n+5)+2\gamma_1(n-2)(n+2)+\gamma_2(n-2)+\gamma_3(n+$$
$$+3)]C_{n-2}^{(1)}+(n-2)[(n-1)(n-3)+\gamma_1(n-3)+\gamma_3]C_{n-3}^{(1)}$$

$$C_n^{(3)}=\frac{1}{n(n+2)(n-3)}\{(n-1)[3n^2-5n-4+\gamma_1 n+\gamma_2]C_{n-1}^{(3)}-[(n-1)\times$$
$$\times(n-2)(3n-4)+2\gamma_1(n-1)(n-2)+\gamma_2(n-2)+\gamma_3 n]C_{n-2}^{(3)}+(n-2)\times$$
$$\times[(n-1)(n-3)+\gamma_1(n-3)+\gamma_3]C_{n-3}^{(3)}+\frac{\omega_3}{2\Gamma^3}\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)(n-k+2)\times$$
$$\times[(3k^2-2k+6)C_{k-3}^{(1)}-((k-4)(6k-5)+\gamma_1(2k-1)+\gamma_2)C_{k-4}^{(1)}+$$
$$+(3(k-4)(k-5)+2\gamma_1(k-5)+\gamma_3)C_{k-5}^{(1)}]\}$$

$$C_n^{(2)}=\frac{1}{(n+1)(n+3)(n-2)}\{[(n-1)(3n^2+n-6)+\gamma_1 n(n+1)+\gamma_2 n]C_{n-1}^{(2)}-$$
$$-[(n-1)(n-2)(3n-1)+2\gamma_1 n(n-2)+\gamma_2(n-2)+\gamma_3(n+1)]C_{n-2}^{(2)}+$$
$$(n-2)[(n-1)(n-3)+\gamma_1(n-3)+\gamma_3]C_{n-3}^{(2)}+\frac{\omega_2}{\Gamma^2}\sum_{k=0}^{n}(n-k+1)(n-k+2)\times$$
$$\times[(3k^2-2k+6)C_{k-3}^{(1)}-((k-4)(6k-5)+\gamma_1(2k-1)+\gamma_2)C_{k-4}^{(1)}+$$
$$+(3(k-4)(k-5)+2\gamma_1(k-5)+\gamma_3)C_{k-5}^{(1)}]-6\sum_{k=3}^{\infty}(-1)^n\frac{\omega_o!}{n!(\omega_o-n)!}\}$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (11), удовлетворяющее краевым условиям (12), имеет вид:

$$G=A_1G_1+A_3G_3+G_2 \tag{17}$$

Постоянные интегрирования $A_1$, $A_2$ определяются из граничных условий на поверхности частицы для компонент массовой скорости (например, условия прилипания).

Таким образом, получено решение уравнения газовой динамики при малых числах Рейнольдса с учетом сжимаемости среды и степенном виде зависимости коэффициентов молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности) от температуры. Математический метод, предложенный в работе, может быть использован при решении других задач физики аэродисперсных систем .

## Список литературы


[1] *Н.В. Малай.* ИФЖ. 2000. Т. 73. № 4. С. 728–738

[2] *Н.В. Малай.* ЖТФ. 2002. Т. 72. № 11. С. 35–43

[3] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 630 с.

[4] *Ст. Бретшнайдер.* Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета. М.: Химия. 1966. 535 с.

[5] *В.И. Смирнов* Курс высшей математики. М.: Наука. 1974. Т. 2,3


# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА СРАЩИВАЕМЫХ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ФОТОФОРЕТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ НАГРЕТОЙ ТВЕРДОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ


**Н.В. Малай, А.А. Стукалов**

Белгородский государственный университет,

308015, Белгород, ул. Победы, 85. Кафедра теоретической физики


Известно, что твердая частица, взвешенная в термодинамически неравновесной вязкой газообразной среде, начинает двигаться. Причина такого движения связана с появлением градиента температуры вдоль поверхности частицы. В данной работе рассматривается случай, когда градиент температуры обусловлен наличием внутри частицы внутренних тепловых источников неоднородно распределенных в ее объеме, например, за счет поглощения электромагнитного излучения. В этом случае, такое движение называется фотофоретическим, и его механизм по своей физической природе аналогичен термофорезу и связан с тепловым скольжением газа вдоль твердой неравномерно нагретой поверхности частицы [1].

Описание фотофоретического движения достаточно сложная задача. Это связано с тем, что, во-первых, в газе движение конкретной частицы определяется как поверхностными, так и объемными эффектами, возникающими из-за неоднородных распределений гидродинамического и температурного полей; во-вторых, это движение возникает за счет скольжения газа вдоль твердой поверхности и в-третьих, это механизм распределения тепловых источнимкв внутри частицы, за счет которых и происходит неравномерный нагрев ее поверхности.

До настоящего времени достаточно подробно рассматривался фотофорез в газе как при малых [2], так и при значительных перепадах температуры [3], но при этом не учитывалось влияние движения среды на фотофорез. Последовательная теория фотофореза может быть построена только в рамках так называемого "метода сращиваемых асимптотических разложений"[4]. Причина связана с граничным условием для поля температуры вдали от частицы: $T_e \to T_{e\infty}$ при $r \to \infty$. В отличие от термофореза, где нам уже известно поведение поля температуры вдали от частицы: $T_e \to T_{e\infty} + |\nabla T|\ r\cos\theta$, где $\nabla T$ - заданный, с помощью внешних источников, градиент температуры. Особенно интерес к этому вопросу резко возрастает, когда мы

рассматриваем фотофорез при значительных перепадах температуры. В этом случае конвективные и вязкие члены становятся практически одного порядка. Под относительным перепадом температуры понимается разность температур между средней температурой поверхности частицы $T_s$ и областью вдали от нее $T_{e\infty}$. Относительный перепад температуры считается малым, если $(T_s - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$ и значительным, если $(T_s - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim O(1)$. В последнем случае частица считается нагретой и при решении уравнений газовой динамики и теплопереноса необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса от температуры. Здесь и далее индексы "$e$" и "$i$" будем относить соответственно к газообразной сред и частице; индексом "$\infty$" - обозначены параметры газа на бесконечности.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим твердую сферическую частицу радиусом $R$, внутри которой действуют неравномерно распределенные источники тепла плотностью $q_i$, находящуюся в вязкой газообразной среде. При теоретическом описании фотофоретического движения частицы предполагается, что фазовый переход отсутствует, коэффициент теплопроводности частицы по величине много больше коэффициента теплопроводности газа и учитывается степенной вид зависимости коэффициентов молекулярного переноса вязкости ($\mu$) и теплопроводности ($\lambda$) от температуры следующим образом: $\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^{\beta}$, $\lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^{\alpha}$, $\lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^{\gamma}$, где $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty})$, $t_e = T_e/T_{e\infty}$, $t_i = T_i/T_{e\infty}$.

Движение частицы описывается в сферической системе координат $r$, $\theta$, $\varphi$ с началом в центре частицы. В рамках сформулированных допущений уравнения и граничные условия для скорости $\mathbf{U_e}$, давления $P_e$ и температур $T_e$, $T_i$ запишутся в виде [5]

$$\frac{\partial P_e}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu_e\left(\frac{\partial U_k^e}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j^e}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial U_m^e}{\partial x_m}\right)\right\}, \quad \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\rho_e U_k^e\right) = 0 \tag{1}$$

$$\rho_e c_{pe}\left(\mathbf{U_e}\nabla\right) T_e = div\left(\lambda_e \nabla T_e\right), \quad div\left(\lambda_i \nabla T_i\right) = -q_i \tag{2}$$

$$r = R, \;\; T_e = T_i, \;\; \lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} + \sigma_o \sigma_1 \left(T_i^4 - T_{e\infty}^4\right)$$

$$U_r^e = 0, \quad U_\theta^e = K_{TS}\frac{\nu_e}{RT_e}\frac{\partial T_e}{\partial \theta} \tag{3}$$

$$r \to \infty, \;\; \mathbf{U_e} = U_{e\infty}\cos\theta\,\mathbf{e_r} - U_{e\infty}\sin\,\mathbf{e}_\theta, \quad P_e = P_{e\infty}, \;\; T_e = T_{e\infty} \tag{4}$$

$$r \to 0, \quad T_i \neq \infty \tag{5}$$

Здесь $\sigma_o$ - постоянная Стефана-Больцмана; $\sigma_1$ - интегральная степень черноты; $U_{e\infty} =\mid \mathbf{U_{e\infty}} \mid$ - величина скорости набегающего потока; $x_k$ - декартовые координаты; $\mathbf{e_r}$ и $\mathbf{e}_\theta$ -единичные векторы сферической системы координат; $\rho_e$, $\nu_e$ и $c_{pe}$ - плотность, кинематическая вязкость и удельная теплоемкость газообразной среды; $U_r$ и $U_\theta$ - радиальная и касательная компоненты массовой скорости $\mathbf{U_e}$ ; $K_{TS}$ - коэффициент теплового скольжения, который определяется методами кинетической теории. При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса и энергии равных единице, газокинетический коэффициент $K_{TS} = 1.152$ [1].

Обезразмерим уравнения и граничные условия введя безразмерную координату и скорость следующим образом:$y_k = x_k/R$, $\mathbf{V_e}$=$\mathbf{U_e}/U_\infty$. При числах Рейнольдса $Re_\infty =$

$(\rho_e U_{e\infty} R)/\mu_{e\infty} \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, поэтому решение уравнений газовой динамики и теплопереноса следует искать в виде разложения по числу Рейнольдса. При нахождении силы и скорости фотофореза ограничимся поправками первого порядка малости.

Решение уравнения, описывающего распределение температуры вне частицы, будем искать методом сращиваемых асимптотических разложений [4]. Внутренние и внешние асимптотические разложения обозразмеренной температуры ищем в виде

$$t_e(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{en}(y,\theta), \quad f_o(\varepsilon) = 1, \quad \varepsilon = Re_\infty \tag{6}$$

$$t_e^*(\xi,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^*(\varepsilon) t_{en}^*(\xi,\theta) \tag{7}$$

где $\xi = \varepsilon y$ - "сжатая"радиальная координата [4], $y = r/R$.

При этом требуется, чтобы

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} \longrightarrow 0, \quad \frac{f_{n+1}^*}{f_n^*} \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \varepsilon \longrightarrow 0$$

Недостающие граничные условия для внутреннего и внешнего разложений вытекают из условия тождественности асимптотических продолжений того и другого в некоторую промежуточную область, т.е. $t_e(y \to \infty, \theta) = t_e^*(\xi \to 0, \theta)$.

Асимптотическое разложение решения внутри частицы, как показывают граничные условия на поверхности частицы (2) следует искать в виде аналогичном (6)

$$t_i(y,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\varepsilon) t_{in}(y,\theta) \tag{8}$$

Относительно функций $f_n(\varepsilon)$ и $f_n^*(\varepsilon)$ предполагается, что их порядок малости по $\varepsilon$ увеличивается с ростом n.

С учетом сжатой радиальной координаты имеем следующее уравнения для внешних асимптотических разложений $t_e^*$, $\mathbf{V_e^*}$:

$$Pr_\infty \left( V_r^* \frac{\partial t_e^*}{\partial \xi} + \frac{V_\theta^*}{\xi} \frac{\partial t_e^*}{\partial \theta} \right) = \Delta^* t_e^*, \quad t_e^* \to 0 \ \text{ при } \ \xi \to \infty \tag{9}$$

$$\mathbf{V_e^*}(\xi,\theta) = \mathbf{n_z} + \varepsilon \ \mathbf{V_{e1}^*}(\xi,\theta) \ + \ ... \tag{10}$$

Здесь $\Delta^*$ - осесимметричный оператор Лапласа, полученный из $\Delta$ заменой y на $\xi$; $Pr_\infty = \mu_{e\infty} c_{pe}/\lambda_e$ - число Прандтля; $\mathbf{n_z}$ - единичный вектор в направлении оси z.

Вид граничных условий вдали от частицы указывает на то, что решение в нулевом приближении для компонент скорости следует искать в виде

$$V_r(y,\theta) = G(y)\cos\theta, \quad V_\theta(y,\theta) = -g(y)\sin\vartheta \tag{11}$$

**2. Распределение температуры в окрестности неравномерно нагретой частицы**. Найдем распределение температуры в окрестности нагретой частицы. После-

довательно определяя нулевые и первые члены разложения, и учитывая условия сращивания внутренних и внешних разложений, получаем:

$$t_e^*(\xi,\theta)=t_{eo}^*+\varepsilon t_{e1}^*,\;\; t_e(y,\theta)=t_{eo}+\varepsilon t_{e1},\;\; t_i(y,\theta)=t_{io}^*+\varepsilon t_{i1},\;\; t_{eo}^*=1,$$

$$t_{eo}(y)=\left(1+\frac{\Gamma_o}{y}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}},\;\; t_{e1}^*(\xi,\theta)=\frac{\Gamma_o}{(1+\alpha)\xi}\exp\left\{\frac{Pr_\infty}{2}\xi(x-1)\right\}$$

$$t_{io}(y)=\left(B_o+\frac{1+\gamma}{4\pi R\lambda_{i\infty}T_{e\infty}y}\int\limits_V q_i(r,\theta)\,dV+\int\limits_1^y\frac{\psi_o}{y}dy-\frac{1}{y}\int\limits_1^y\psi_o(y)dy\right)^{\frac{1}{1+\gamma}} \qquad (12)$$

$$t_{i1}(y,\theta)=\cos\theta\frac{1}{(1+\gamma)t_{io}^{\gamma}}\left(B_1y+\frac{(1+\gamma)RJ}{3\lambda_{i\infty}T_{e\infty}y^2}+\frac{1}{3}\left[y\int\limits_1^y\frac{\psi_1}{y^2}dy-\frac{1}{y^2}\int\limits_1^y\psi_1ydy\right]\right)$$

$$t_{e1}(y,\theta)=\frac{1}{t_{eo}^{\alpha}}\left\{\omega\frac{\Gamma-y}{y}+\cos\theta\left(\frac{\Gamma_1}{y^2}+\frac{\omega}{3}\left[\frac{K_1}{y^2}-yK_2\right]\right)\right\}$$

Здесь $K_1=\int y(1-\ell)\;G(y)dy$, $K_2=\int\dfrac{G(y)(1-\ell)}{y^2}\;dy$, $\omega=\dfrac{Pr_\infty\Gamma_o}{(1+\alpha)}$, $\ell=\dfrac{\Gamma_o}{y+\Gamma_o}$, $J=\dfrac{1}{V}\int\limits_V q_izdV$, $V=4/3\pi R^3$, $z=r\cos\theta$, $\psi_n=-\dfrac{R^2(1+\gamma)}{\lambda_{i\infty}T_{e\infty}}y^2\dfrac{2n+1}{2}\int\limits_{-1}^{+1}q_iP_n(x)\,dx$, $\int\limits_V q_i\,z\,dV$ - дипольный момент плотности тепловых источников.

Постоянные интегрирования $\Gamma_o,\Gamma,\;\; B_o,\;\Gamma_1,\;B_1$ определяются из граничных условий на поверхности частицы, а функция $G(y)$ из решения уравнения гидродинамики. Заметим,что при выполнении условия $\lambda_e\ll\lambda_i$ в коэффициенте динамической вязкости можно пренебречь зависимостью по углу $\theta$ в системе частица-газ и считать, что $\mu_e(t_e)\approx\mu_e(t_{eo}),$ т.е. $\mu_e=\mu_{e\infty}t_{eo}^{\beta}$. Это позволяет рассматривать в первом приближении по отдельности тепловую задачу и гидродинамическую. Сшивка решений происходит с помощью граничных условий на поверхности нагретой частицы.

**3. Вывод выражений для фотофоретической силы и скорости.** Учитывая замечания по отношению к $\mu_e$ и подставляя (11) в уравнения (1), разделяя переменные, получаем дифференциальное уравнение для определния функции $G(y)$. Решение полученного дифференциального уравнения ищется в виде обобщенных степенных рядов, см. например, [6].Общая сила, действующя на неравномерно нагретую твердую частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по поверхности частицы [5] и она будет аддитивно складываться из силы вязкого сопротивления среды $\mathbf{F}_\mu$ , силы $\mathbf{F_{ph}}$, пропорциональной дипольному моменту плотности тепловых источников (обычный фотофорез), и силы $\mathbf{F_{dh}}$, обусловленной движением среды:

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_\mu+\varepsilon\;\mathbf{F^1},\;\mathbf{F^1}=\mathbf{F_{ph}}+\mathbf{F_{dh}},\;\mathbf{F}_\mu=6\pi R\mu_{e\infty}U_\infty f_\mu\mathbf{n_z},$$
$$\mathbf{F_{ph}}=-6\pi R\mu_{e\infty}K_{TS}f_{ph}J\mathbf{n_z},\;\mathbf{F_{dh}}=-6\pi R\mu_{e\infty}K_{TS}f_{dh}\mathbf{n_z}$$

Коэффициенты $f_\mu,f_{ph},f_{dh}$ являются сложными функциями, зависящие от отношений коэффициентов теплопроводностей, средней температуры поверхности и показателей $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Приравнивая общую силу к нулю, получаем выражение для общей

скорости упорядоченного движения

$$\mathbf{U} = \varepsilon\ \mathbf{U^1},\ \mathbf{U^1} = \mathbf{U_{ph}} + \mathbf{U_{dh}},$$
$$\mathbf{U_{ph}} = -K_{TS}\frac{f_{ph}}{f_\mu}J\mathbf{n_z},\ \mathbf{U_{dh}} = -K_{TS}\frac{f_{dh}}{f_\mu}\mathbf{n_z}$$

Чтобы оценить какой вклад движения среды оказывает на силу и скорость фотофореза твердой сферической частицы, необходимо конкретизировать природу тепловых источников неоднородно распределенных в ее объеме. В качестве примера в статье рассмотрен простой случай, когда нагрев частицы происходит за счет поглощения электромагнитного излучения и частица поглощает электромагнитное излучение как черное тело. Численные оценки проводились для частиц графита, $Al_20_3$. взвешенных в воздухе при $T_{e\infty} = 273K,\ P_{e\infty} = 1$ атм, $\alpha = \beta = \gamma = 1,\ 0.7,\ 0.5$. Расчеты показали, что учет нагрева поверхности и конвективных членов в уравнении теплопроводности оказыввет существенное влияние на силу и скорость фотофореза.

# Список литературы


[1] *А.Б. Поддоскин, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов.* ЖТФ. 1982. Т. 82. № 11. С. 2253–2261.

[2] *В.Б. Кутуков, Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов.* ЖТФ. 1976. Т. 46. № 3. С. 626–627.

[3] *Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов.* ИФЖ. 1988. Т. 54. № 4. С. 630–635.

[4] *М. Ван-Дайк.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967. 310 с.

[5] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 630 с.

[6] *Н.В. Малай.* ИФЖ. 2000. Т. 73. № 6. С. 728–738.


## РАСЧЕТ ХАРАКТЕРИСТИК НОСИТЕЛЕЙ ТОКА В СПЛАВАХ $(\mathbf{Bi_{0.88}Sb_{0.12}})_{\mathbf{1-x}}\mathbf{Te_x}$


**О.И. Марков**

Орловский государственный университет


Висмут, являясь полуметаллом, занимает промежуточное положение между металлами и полупроводниками [1, 2]. Уникальные свойства висмута (природный моноизотоп, малая концентрация носителей тока $\sim 10^{-5}$ на атом, малая эффективная масса носителей $\sim 10^{-2}m_e$, большая диамагнитная восприимчивость $\sim 10^{-5}$, диэлектрическая проницаемость $\sim 100$, значение g-фактора $\sim 200$) позволили впервые обнаружить новые физические явления. Достаточно назвать лишь некоторые (эффекты де Гааза—ван Альфена и Шубникова—де Гааза, циклотронный резонанс), чтобы понять, что их открытие привело к созданию самых мощных современных методов исследования зонной структуры металлов и полупроводников. Сплавы висмута с сурьмой образуют непрерывный ряд твердых растворов замещения. Исследования, проведенные Джейном [3], показали, что эти сплавы обладают полупроводниковыми свойствами, при содержании сурьмы в области температур ниже 150 К. Возможность плавной перестройки энергетического спектра, а также чувствительность свойств висмута и его

сплавов к внешним воздействиям: изменению температуры, давления, магнитного и электрических полей позволили выдвинуть новые теоретические положения в физике твердого тела и развить новые экспериментальные методы. В настоящее время твердые растворы висмут-сурьмы хорошо известны в физике твердого тела как модельный материал, представляющий как теоретический, так и практический интерес.

Общая схема перестройки энергетического спектра дается в [4]. Тщательное изучение перестройки спектра позволило открыть авторам новое состояние вещества — т. н. «бесщелевое» состояние полупроводника. Изучение кинетических свойств этих сплавов выявило исключительно высокие термоэлектрические свойства, которые можно использовать для создания эффективных низкотемпературных термоэлектрических охлаждающих устройств [5]. В связи с этим термоэлектрические свойства сплавов висмут-сурьма изучались многочисленными группами исследователей [6–11]. Легирование висмута и его сплавов с сурьмой теллуром позволяет менять положение уровня Ферми и исследовать изменение физических свойств сплавов, обусловленное его изменением.

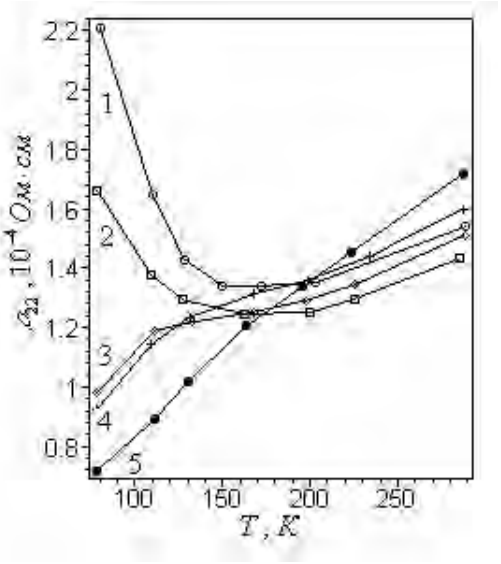



Рис. 1. Температурная зависимость компоненты удельного сопротивления для сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$ (кривая 1 при x = 0, 2 — 0.001, 3 — 0.003, 4 — 0.005, 5 — 0.01).

С целью более подробного изучения изменения концентрации и подвижностей носителей заряда с изменением состава и температуры нами исследовались сплавы $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$, с x = 0, 0.001, 0.003, 0.005 и 0.01 ат. % Te. Технология получения и приготовления образцов монокристаллов подробно описывалась в работе [12]. Там же приводятся результаты исследования кинетических свойств перечисленных сплавов. В данной работе приведены результаты расчета средних подвижностей и концентраций носителей заряда для указанных составов. Для расчета использовалась изотропная модель с квадратичным законом дисперсии. Расчет производился на основе экспериментальных данных по гальваномагнитным и термоэлектрическим явлениям. Все измеряемые коэффициенты кинетических эффектов тензорные, принадлежащие классу симметрии $D_{3d}$.

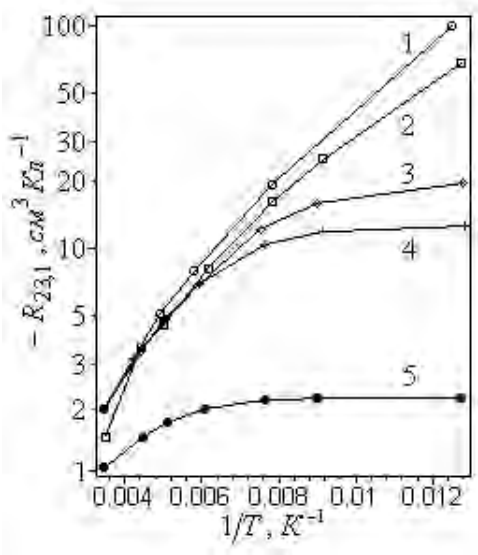



Рис. 2. Температурная зависимость компоненты постоянной Холла $R_{23,1}$ для сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$ (кривая 1 при x = 0, 2 — 0.001, 3 — 0.003, 4 — 0.005, 5 — 0.01).

Экспериментальные зависимости компонент удельного сопротивления и коэффициента Холла представлены на рис. 1 и 2 соответственно. Из рис. 1 видно, что зависимость от температуры можно разбить на две области. Сплавы с содержанием Te 0, 0.001, 0.003 при низких температурах обладают полупроводниковыми свойствами и с повышением температуры переходят в полуметаллические. Компонента коэффициента Холла отрицательна во всем интервале температур и магнитных полей. На рис. 2 хорошо выделены области «однозонности» для сплавов с x = 0.003, 0.005 и 0.01 ат. %. Расчеты кинетических эффектов в «однозонном» состоянии значительно упрощаются. Это позволяет ограничиться при расчете этих сплавов одним типом носителей заряда. Считается, что рассеяние носителей происходит на фононах. Сначала по экспериментальным данным по сильной компоненте Холла можно найти концентрацию носителей заряда, поскольку в области «однозонности» компонента связана с концентрацией электронов простой зависимостью [13]

$$R_{23,1} = \frac{1}{en} \tag{1}$$

значение химического потенциала определяется по формуле для концентрации носителей заряда

$$n = \frac{8\pi}{3h^3}(2m * kT)^{3/2} F_{3/2}(\eta) \tag{2}$$

где $F_i(\eta) = \int\limits_0^\infty \left(-\frac{\partial f_0}{\partial x}\right) \cdot x^i \, dx$ интегралы Ферми [13], $f_0(x) = [1 + \exp(x - \eta)]^{-1}$. По формулам, приведенным в [13], вычислялась дифференциальная термоЭДС

$$\alpha = -\frac{k}{e}\left(\frac{F_2(\eta)}{F_1(\eta)} - \eta\right) \tag{3}$$

и результат сравнивался с экспериментальными данными [12]. Компонента подвижности вычислялась на основе соотношения

$$u_{22} = \frac{R_{23,1}}{\rho_{22}}\,. \tag{4}$$

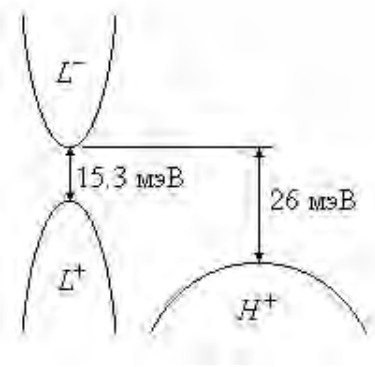



Рис. 3. Зонная схема энергетического спектра сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$.

Для всех остальных сплавов расчет проводился согласно зонной схеме, представленной на рис. 3. Расчет концентрации и средней подвижности носителей тока проводился в рамках изотропной трехзонной модели. Модель жестких зон остается справедливой до температуры не выше дебаевской [9]. Не изменяются с температурой в этом интервале и эффективные массы плотности состояний. Поэтому при расчете концентрации и подвижности ограничимся интервалом температур 77–130 K. В рассматриваемых сплавах актуальными являются три экстремума: легкие электроны и легкие дырки в точке L и тяжелые дырки в точке H зоны Бриллюэна. В силу уравнения электронейтральности

$$n_L = p_L + p_H + N_d \tag{5}$$

концентрации носителей всех экстремумов оказывается связанными друг с другом. Для смешанной проводимости удельная электропроводность состоит из трех составляющих

$$\sigma = \sigma_L^- + \sigma_L^+ + \sigma_H^+. \tag{6}$$

Для дифференциальной термоЭДС имеет место следующая формула [13]:

$$\alpha = \frac{\alpha_L^- \sigma_L^- + \alpha_L^+ \sigma_L^+ + \alpha_H^+ \sigma_H^+}{\sigma}. \tag{7}$$

Результаты расчета концентрации и средних подвижностей электронов представлены на рис. 4 и 5. На рис. 4 дан температурный ход концентрации электронов от азотной температуры до 130 K. Закон изменения концентрации электронов близок к линейному. Изменение концентрации электронов в зависимости от количества донорной примеси тоже линейное. Что касается средней подвижности электронов (рис. 5.), то она падает с ростом температуры и концентрации теллура.

Несмотря на то, что расчет концентраций носителей тока для сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$ уже проводился неоднократно, впервые приведены подробные результаты расчета по температуре и концентрации донорной примеси. Подвижность L дырок, несмотря на симметрию зон, примерно в три раза меньше чем электронов. Большая погрешность, возникающая при расчете подвижности T дырок, позволяет сделать лишь оценку порядка величины. Результаты расчета находятся в хорошем согласии с данными других авторов [14], полученными при азотной температуре. Полученные результаты будут использованы для расчета термоэлектрической эффективности сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$. Подводя итоги анализа механизмов рассеяния

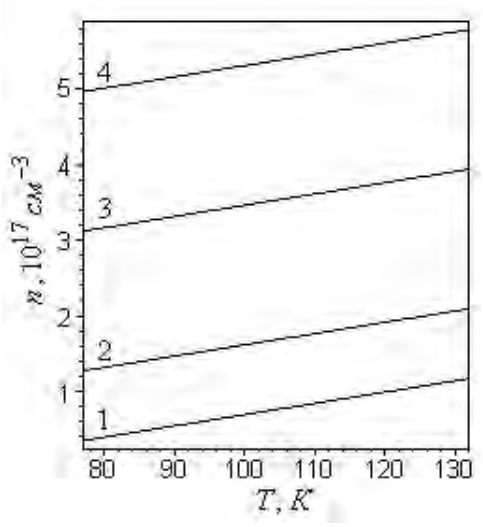



Рис. 4. Температурная зависимость концентрации электронов для сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$ (кривая 1 при x = 0, 2 — 0.001, 3 — 0.003, 4 — 0.005).

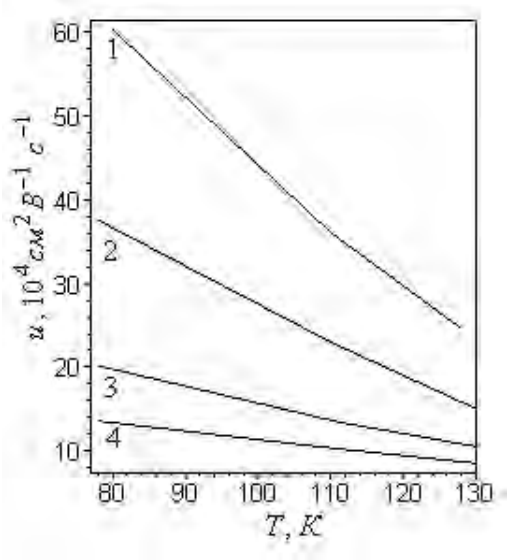



Рис. 5. Температурная зависимость подвижности электронов для сплавов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$ (кривая 1 при x = 0, 2 — 0.001, 3 — 0.003, 4 — 0.005).

в сплавах висмут-сурьма в рамках квадратичной аппроксимации закона дисперсии можно сказать, что в чистых сплавах висмут-сурьма происходит рассеяние на акустических фононах, в квазибинарных сплавах появляется рассеяние на экранированном потенциале ионизованной примеси.

# Список литературы

[1] *А. Фальковский.* Физические свойства висмута. УФН. 1968, т. 94, вып. 1. стр. 3–41.

[2] *С. Эдельман.* Свойства электронов в висмуте. УФН. 1977, т. 123, вып. 2., стр. 257–287.

[3] *A. L. Jain.* Temperature Dependence of the Electrical Properties of Bismuth-Antimony Alloys. // Phys. Rev., 1959. Vol. 114, № 6, Pp. 1518–1528.

[4] *Н.Б. Брандт, С.М. Чудинов, В.Г. Караваев.* Исследование бесщелевого состояния индуцированного магнитным полем в сплавах висмут-сурьма // ЖЭТФ. 1976, т. 70, № 6, С. 2296–2317.

[5] *G.E. Smith, R. Wolf.* Thermoelectric Properties of Bismuth-Antimony Alloys. // J. Appl. Phys. 1962. Vol. 33. № 3. Pp. 841–846.

[6] *H.J. Goldsmid.* Bismuth-Antimony Alloys. // Physica Status Solidi (a), 1970. Vol. 1. № 1. Pp. 7–28.

[7] *Г.А. Иванов, В.А. Куликов, В.Л. Налетов, А.Ф. Панарин, А.Р. Регель.* Термоэлектрическая добротность чистых и легированных сплавов висмут-сурьма в магнитном поле. // ФТП. 1972, т. 6. в. 7. С. 1296.

[8] *Н.А. Редько.* Электронные и фононные явления переноса в полуметаллических и полупроводниковых сплавах висмут-сурьма: Дис.. . . д-р физ. мат. наук. / ФТИ РАН. — СПб. 1998.

[9] *В.М. Грабов.* Энергетический спектр и механизмы релаксации носителей заряда в легированных кристаллах висмута, сурьмы и сплавов висмут-сурьма: Дис.. . . д-р физ. мат. наук. / СПбГТУ. — СПб. 1999.

[10] *V.S. Zemskov, A.D. Belaya, U.S. Beluy, G.N. Kozhemyakin.* Growth and investigation of thermoelectric properties of Bi-Sb alloy single crystals // Journal of Crystal Growth. 2000, Vol. 212, Pp. 161–166.

[11] *Н.А. Родионов.* Механизмы релаксации электронов и фононов при переносе заряда и тепла в твердых растворах на основе висмута: Дис.. . . д-р физ. мат. наук. / ФТИ РАН. — СПб. 2004.

[12] *О.И. Марков.* Термоэлектрические свойства твердых растворов $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$. Известия ТулГУ. Серия. Физика. Вып. 4. — Тула.: Изд-во ТулГУ, 2004. — С. 81–86.

[13] *Б.М. Аскеров.* Кинетические эффекты в полупроводниках. Л., Наука, 1970.

[14] *Г.А. Иванов, Г.Н. Колпачников, А.Н. Суровцев.* Электроны L и T групп в сплавах $(Bi_{88}Sb_{12}) - Te$. Доклады XXIII Герценовских чтений. Общая и экспериментальная физика. ЛГПИ им. А.И. Герцена. Л. 1971. с. 1–3.

## К ВОПРОСУ О ТЕРМО- И ФОТООФОРЕТИЧЕСКОМ ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОЙ НАГРЕТОЙ АЭРОЗОЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СФЕРОИДАЛЬНОЙ ФОРМЫ

**А.А. Плесканев, Н.В. Малай**

Белгородский государственный университет,

308015, Белгород, ул. Победы, 85. Кафедра теоретической физики

В последнее время все большую значимость приобретают научные исследования по различным проблемам физики аэродисперсных систем. Одной из основных проблем механики аэродисперсных систем является проблема теоретического описания поведения взвешенных частиц в неоднородных по температуре (термофорез) газообразных средах [1]. Явление термофореза всегда сопутствует термодинамически неравновесным системам. В связи с интенсивным развитием и использованием лазерной технологии

возрос интерес и к теории фотофореза аэрозольных частиц [2]. Под фотофорезом понимают движение аэрозольных частиц в газе, перепад температуры в которых возникает вследствие неоднородного нагрева поверхности электромагнитным излучением. Физическая причина обоих явлений связана с тепловым скольжением внешней среды вдоль поверхности частиц [3]. До настоящего времени достаточно подробно рассматривался термо- и фотофорез в газе как при малых [1, 2], так и при значительных перепадах температуры для сферических частиц [4]. Частицы, входящие в состав реальных дисперсных систем могут иметь произвольную форму поверхности, например сфероидальную. Движение частиц сфероидальной формы в неизотермических газообразных средах изучено лишь в случае, когда относительный перепад температуры мал [5,6]. Под относительным перепадом температуры понимается отношение разности между средней температурой поверхности частицы $T_s$ и температурой области вдали от нее $T_\infty$, к последней. Относительный перепад температуры считается малым, если $(T_s - T_\infty)/T_\infty \ll 1$ и значительным в противном случае.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим твердую сплюснутую сфероидальную частицу, внутри которой действуют неравномерно распределенные источники тепла плотностью $q_i$. Считается, что газообразная среда занимает все пространство и на достаточно большом расстоянии от сфероида с помощью внешних источников поддерживается малый постоянный градиент температуры $(\nabla T||OZ)$. При теоретическом описании движения частицы предполагалось отсутствие фазового перехода, коэффициент теплопроводности газа по по величине много меньше коэффициента теплопроводности частицы и $(T_s - T_{e\infty})/T_{e\infty} \sim O(1)$. Последнее условие указвает на то, что при теоретическом описании термо- и фотофореза твердой аэрозольной частицы сфероидальной формы необходимо учитывать зависимость коэффициентов молекулярного переноса от температуры. В данной работе учитывался степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры: $\mu_g = \mu_{g\infty} t_g^\beta$, $\lambda_g = \lambda_{g\infty} t_g^\alpha$ и $\lambda_p = \lambda_{p\infty} t_p^\gamma$. Здесь $\mu_{g\infty} = \mu_g(T_\infty)$, $\lambda_{g\infty} = \lambda_g(T_\infty)$ и $\lambda_{p\infty} = \lambda_p(T_\infty)$, где $t_g = T_g/T_\infty, t_p = T_p/T_\infty$. Здесь и далее индексы "$g$" и "$p$" будем относить соответственно к газообразной среде и частице; индексом "$\infty$" - обозначены параметры газа на бесконечности.

Движение частицы описывается в сфероидальной системе координат $\varepsilon$, $\eta$, $\varphi$ с началом в центре частицы, при этом положение декартовой системы координат фиксировано таким образом , чтобы ось $OZ$ совпадала с осью симметрии сфероида. В рамках сформулированных допущений уравнения и граничные условия для скорости $\mathbf{U}_g$, давления $P_g$ и температур $T_g$, $T_p$ запишутся в виде [7]

$$\frac{\partial P_g}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\mu_g\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial U_m}{\partial x_m}\right)\right\}, div(\rho_g \mathbf{U}_g) = 0 \tag{1}$$

$$div\,(\lambda_g \nabla T_g) = 0, \quad div\,(\lambda_p \nabla T_p) = -q_p \tag{2}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0: \qquad U_\varepsilon = 0, \;\; U_\eta = K_{ts}\frac{\nu_g}{T_g}(\nabla T_g \mathbf{e}_\eta)$$
$$T_g = T_p, \;\; \lambda_g(\nabla T_g \mathbf{e}_\varepsilon) = \lambda_p(\nabla T_p \mathbf{e}_\varepsilon) + \sigma_0\sigma_1(T_g^4 - T_\infty^4) \tag{3}$$

$$\varepsilon \to \infty: \qquad \mathbf{U}_g = U_\infty \cos\eta\, \mathbf{e}_\varepsilon - U_\infty \sin\eta\, \mathbf{e}_\eta, \;\; P_g = P_\infty$$
$$T_g = T_\infty + |\nabla T| c\,\mathrm{sh}\,\varepsilon \cos\eta \tag{4}$$

$$\varepsilon \to 0: \qquad T_p \neq \infty \tag{5}$$

Здесь $\sigma_o$ - постоянная Стефана-Больцмана; $\sigma_1$ - интегральная степень черноты; $U_\infty = \mid \mathbf{U}_{g\infty} \mid$ - величина скорости набегающего потока; $x_k$ - декартовы координаты; $\mathbf{e}_\varepsilon$ и $\mathbf{e}_\eta$ -единичные векторы сфероидальной системы координат; $\rho_g$, $\nu_g$ - плотность, кинематическая вязкость газообразной среды; $U_\varepsilon$ и $U_\eta$ - радиальная и касательная компоненты массовой скорости $\mathbf{U}_g$ ; $K_{ts}$ - коэффициент теплового скольжения, который определяется методами кинетической теории. При коэффициентах аккомодации тангенциального импульса и энергии равных единице, газокинетический коэффициент $K_{ts} = 1.152$ [3].

**2. Распределение температуры в окрестности частицы. Определение силы и скорости термо-фотофореза**. Для нахождения термо-фотофоретической силы и скорости, необходимо знать распределение температуры, скорости и давления в окрестности сфероида. При числах Рейнольдса $Re_\infty = (\rho_g U_\infty R)/\mu_{g\infty} \ll 1$ набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, поэтому решение уравнений газовой динамики и теплопереноса следует искать в виде разложения по малому параметру [8] . В задаче, кроме числа Рейнольдса, имеется еще один малый контролируемый параметр $\xi = a \mid \nabla T \mid /T_\infty \ll 1$, характеризующий перепад температуры на размере частицы. Причем этот перепад температуры обусловлен двумя разними эффектами (термофорезом и фотофорезом), т.е. имеющие одинаковую физическую природу. Будем искать решение краевой задачи (1) - (2) в виде разложения по степеням $\xi$:

$$t_g = t_{g0} + \xi t_{g1} + \ldots, \quad t_p = t_{p0} + \xi t_{p1} + \ldots, \quad \mathbf{V}_g = \mathbf{V}_{g0} + \xi \mathbf{V}_{g1} + \ldots,$$

где $\mathbf{V}_g = \mathbf{U}_g/U_\infty$- безразмерная скорость.

Найдем распределение температуры в окрестности нагретой сфероидальной частицы,при этом мы ограничимся поправками первого порядка малости по $\xi$. Оставляя в уравнениях (2) члены пропорциональные $\xi$ и решая полученные системы уравнений методом разделения переменных, в итоге, получаем для нулевых приближений

$$t_{g0} = \Big(1 + \Gamma_0 \operatorname{arcctg} \lambda\Big)^{\frac{1}{1+\alpha}}, \tag{6}$$

$$t_{p0} = \left(B_0 + I_0 \operatorname{arcctg} \lambda + \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} \operatorname{arcctg} \lambda f_0 d\lambda - \operatorname{arcctg} \lambda \int\limits_{\lambda_0}^{\lambda} f_0 d\lambda\right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \tag{7}$$

для первых приближений

$$t_{g1} = \frac{\cos\eta}{(1+\alpha)t_{g0}^{\alpha}}\Big\{H_1\lambda + \Gamma_1\big(\lambda \operatorname{arcctg}\lambda - 1\big)\Big\}, \tag{8}$$

$$t_{p1} = \frac{\cos\eta}{(1+\gamma)t_{p0}^{\gamma}}\Big\{B_1\lambda - I_1(\lambda \operatorname{arcctg}\lambda - 1) - \lambda\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}(\lambda \operatorname{arcctg}\lambda - 1)f_1 d\lambda + \\ + (\lambda \operatorname{arcctg}\lambda - 1)\int\limits_{\lambda_0}^{\lambda}\lambda f_1 d\lambda\Big\}, \tag{9}$$

где $I_0 = \dfrac{1+\gamma}{4\pi c\lambda_{p\infty}T_\infty}\int\limits_V q_p dV$, $I_1 = \dfrac{3(1+\gamma)}{4\pi c^2\lambda_{p\infty}T_\infty}\int\limits_V q_p z dV$, $z = c\lambda x$, $x = \cos\eta$, $\lambda = \operatorname{sh}\varepsilon$, $f_0 = -\dfrac{1+\gamma}{2\lambda_{p\infty}T_\infty}\int\limits_{-1}^{1} c^2(\lambda^2+x^2)q_p dx$, $f_1 = -\dfrac{3(1+\gamma)}{2\lambda_{p\infty}T_\infty}\int\limits_{-1}^{1} c^2(\lambda^2+x^2)q_p x dx$.

Постоянные интегрирования $B_0, B_1, \Gamma_0, \Gamma_1, H_1$, входящие в (6) - (9) определяются из граничных условий (3) - (5). В частности

$$H_1 = (1+\alpha)\frac{c}{a},$$

$$\Gamma_1 = \frac{1+\alpha}{\Delta}\frac{c}{a}\left\{1-\delta-\frac{1}{1+\gamma}\frac{t_{g0}^{\alpha}}{t_{p0}^{\gamma}}\frac{aI_1}{c\lambda_0(1+\lambda_0^2)}+\frac{4\sigma_0\sigma_1 T_\infty^3 t_{p0}^3}{\lambda_{p\infty}t_{p0}^{\gamma}}\lambda_0 h_0\right\}, \qquad (10)$$

где $\lambda_0 = \operatorname{sh}\varepsilon_0$, $h_0 = \dfrac{c}{2}\left(1+\dfrac{\lambda_0^2}{2\sqrt{1+\lambda_0^2}}\ln\dfrac{1+\sqrt{\lambda_0^2+1}}{\sqrt{\lambda_0^2-1}}\right)$,

$$\Delta = (1-\delta)\operatorname{arcctg}\lambda_0 + \delta\frac{\lambda_0}{1+\lambda_0^2} - \frac{1}{\lambda_0} + \frac{4\sigma_0\sigma_1 T_\infty^3 t_{p0}^3}{\lambda_{p\infty}t_{p0}^{\gamma}}h_0(\lambda_0\operatorname{arcctg}\lambda_0 - 1), \delta = \frac{\lambda_{gs}}{\lambda_{ps}}.$$

Общее решение уравнения (1) в системе координат сплюснутого сфероида может быть получено с помощью обобщенных степенных рядов и имеет вид

$$U_\varepsilon = \frac{U_\infty}{c\operatorname{ch}\varepsilon H_\varepsilon}(A_1G_1 + A_2G_2 + c^2G_3)\cos\eta,$$

$$U_\eta = -\frac{U_\infty}{2cH_\varepsilon}(A_1G_4 + A_2G_5 + c^2G_6)\sin\eta,$$

где $G$ функции, зависящие только от $\lambda$. Постоянные интегрирования $A_1$,$A_2$ определяются из граничных условий на поверхности сфероида (3).

Интегрируя тензор напряжений по поверхности частицы, получаем следующее общее выражение для силы, которая представляет собой сумму силы вязкого сопротивления среды $F_\mu$ и силы $F^*$:

$$F = F_\mu + F^*,$$

где $F_\mu = -4\pi\mu_g U_\infty c\dfrac{G_1'G_3 - G_3'G_1}{G_2'G_1 - G_1'G_2}$,

$$F^* = \xi\frac{8\pi\mu_g K_{ts}}{t_{g0}^{1+\alpha}\Delta}\frac{c\nu_g\delta}{a(1+\lambda_0^2)}\frac{G_1}{G_2'G_1 - G_1'G_2}\left(1-\frac{3a(\lambda_0\operatorname{arcctg}\lambda_0 - 1)}{4\pi c^3 T_\infty\lambda_{g\infty}\lambda_0}\int\limits_V q_p z dV\right)$$

В общем случае сила $F^*$ состоит из суммы двух сил, появление которых обусловлено чисто термофоретической силой (первое слагаемое) и силой пропорциональной дипольному моменту плотности тепловых источников, неоднородно распределенных в объеме частицы (второе слагаемое).

Приравнивая силу $F$ к нулю, находим следующее выражение для скорости установившегося движения твердой нагретой сфероидальной частицы во внешнем заданном

поле градиента температуры

$$U_p = -\frac{2K_{ts}\nu_g}{t_{g0}^{1+\alpha}\Delta}\frac{\delta\xi}{a(1+\lambda_0^2)}\frac{G_1}{G_1'G_3 - G_3'G_1}\left(1 - \frac{3a(\lambda_0\,\mathrm{arcctg}\,\lambda_0 - 1)}{4\pi c^3 T_\infty \lambda_{g\infty}\lambda_0}\int\limits_V q_p z dV\right) \qquad (11)$$

Заметим, что при получении выражения для силы и скорости термо-теплофоретического движения природа тепловых источников не конкретизировалась, таким образом соотношение (11) является наиболее общим. Выражение для скорости (11) справедливо и для случая малых относительных перепадов [6], когда зависимостью коэффициентом молекулярного переноса от температуры можно пренебречь. При стремлении отношения полуосей сфероида $b/a$ к единице, значение скорости рассчитанное по формуле (11) хорошо согласуется со значениями скорости полученными для сферы, при больших относительных перепадах температуры [4].

# Список литературы


[1] *А.Б. Поддоскин, А.А. Юшканов, Ю.И. Яламов.* ЖТФ. 1982. Т. 52. №11. С. 2253–2262.

[2] *В.Б. Кутуков, Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов.* ЖТФ. 1976. Т. 46. № 3. С. 626–627.

[3] *Ю.И. Яламов, А.Б. Поддоскин, А.А. Юшканов.* ДАН СССР. 1980. Т. 254. № 2. С. 1047–1050.

[4] *Н.В. Малай, Е.Р. Щукин, Ю.И. Яламов.* ИФЖ. 1988. Т. 54. № 4. С. 630–635.

[5] *K.N. Leong.* J. Aerosol Sci. 1984. V. 15. № 4. P. 511–517. Т. 54. №4. С. 630–635.

[6] *Н.В. Малай, А.А. Плесканев.* ИФЖ. 2004. Т. 77. № 6. С. 74–78.

[7] *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц.* Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука. 1986. 630 с.

[8] *М. Ван-Дайк.* Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир. 1967. 310 с.


## ВЛИЯНИЕ ОДНОРОДНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПРОЦЕССЫ ПАРООБРАЗОВАНИЯ ПРИ КИПЕНИИ МАГНИТНОЙ ЖИДКОСТИ*


**А.Я. Симоновский, М.А. Кобозев**

Ставрополь, mikeyk@yandex.ru


Изучается влияние постоянного однородного магнитного поля на частоту образования пузырьков пара при кипении магнитной жидкости на одиночном центре парообразования.

Магнитная жидкость является непрозрачной средой и поэтому традиционные оптические методы для наблюдения за образованием пузырьков пара в магнитной жидкости неприменимы. В настоящей работе частота образования пузырьков пара в магнитной жидкости регистрировалась с помощью системы индукционных катушек при включенном внешнем магнитном поле.


*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00839.

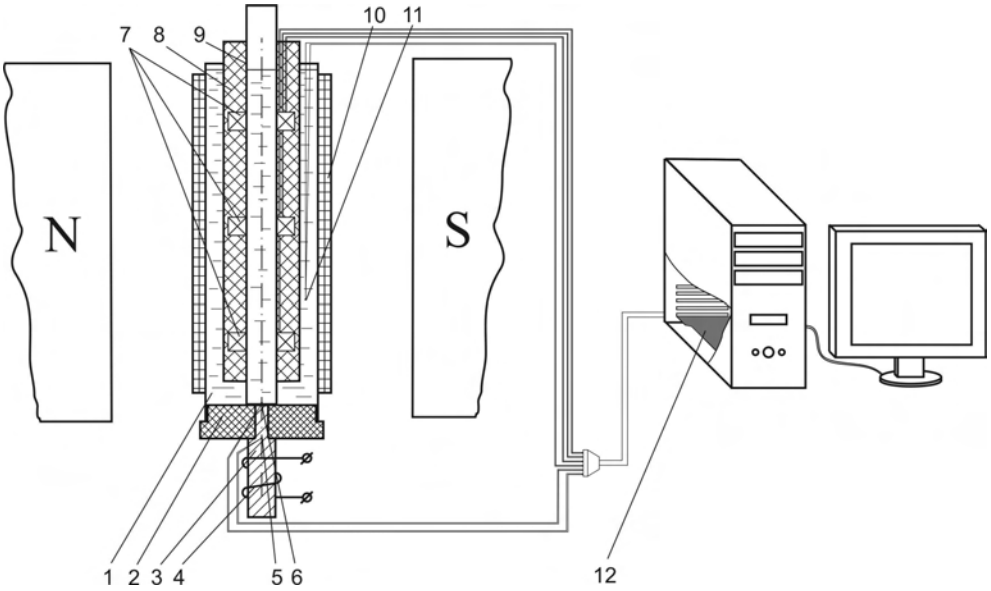



Рис. 1. Схема экспериментальной установки.
1 — ненамагничивающийся цилиндрический контейнер, заполненный магнитной жидкостью;
2 — фторопластовая пробка; 3 — медный стержень; 4, 10 — нагреватели;
5, 6, 11 — термопары; 7 — измерительные катушки; 8 — внешняя стеклянная трубка;
9 — внутренняя стеклянная трубка; 12 — плата АЦП.

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Магнитная жидкость заполняла немагнитный цилиндрический контейнер 1, в нижнем торце которого устанавливалась фторопластовая пробка 2, через осевое отверстие которой пропускался цилиндрический стержень диаметром 1,5 мм, выполненный из немагнитного металла. На верхнем торце этого стержня происходило образование пузырьков пара. Тепло к стержню подводилось с помощью нагревателя 4. На теплоотдающем торце стержня и на расстоянии 7 мм от него устанавливались спаи термопар 5, 6. Для регистрации пузырьков пара у поверхности теплоотдающего стержня устанавливалась система, состоящая из индукционных катушек 7. Система измерительных катушек располагалась в объеме стеклянных трубок 8, 9. Свободное пространство между стеклянными трубками заполнялось герметиком. На поверхности немагнитного цилиндрического контейнера устанавливался охранный нагреватель 10. Показания индукционных датчиков и термопар в процессе кипения жидкости с помощью аналого-цифрового преобразователя (АЦП) 12 подавались на экран монитора компьютера, работающего в режиме осциллографа. Возникновение сигналов в индукционных катушках было связано с прохождением немагнитных пузырьков пара, находящихся в объеме намагничивающейся жидкости в осевом пространстве катушек при включенном внешнем магнитном поле. Магнитная жидкость, применяемая в экспериментах, представляла собой коллоидный раствор магнитных частиц в жидком носителе. В качестве жидкого носителя использовался керосин. Коллоидная система стабилизировалась алеатом натрия.

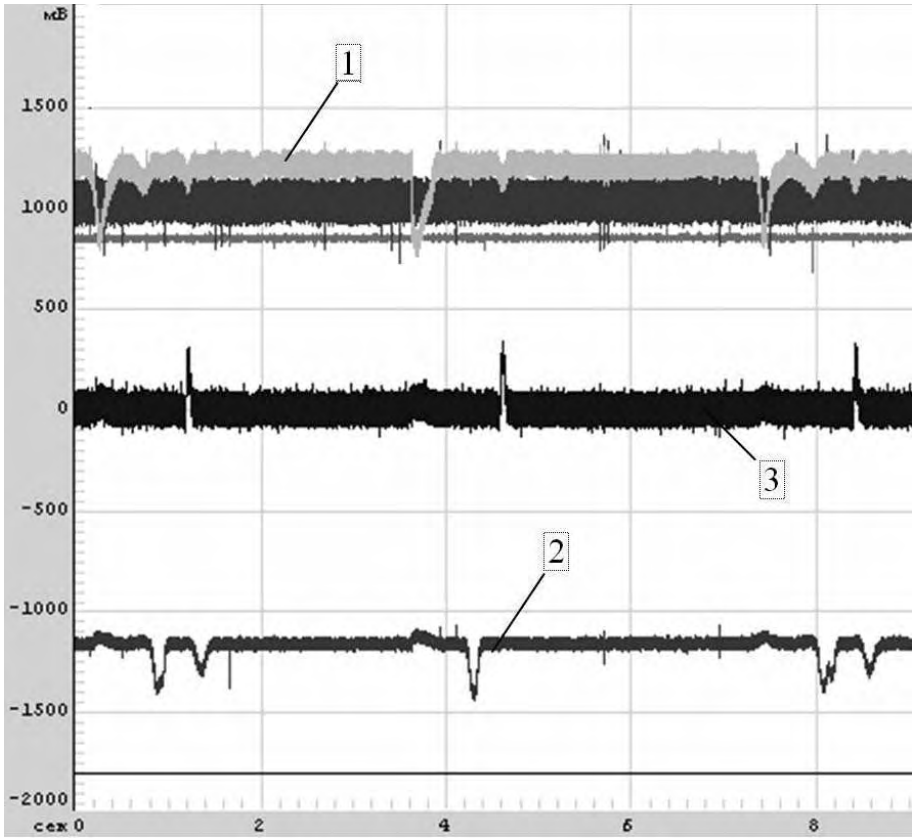



Рис. 2. Характерные осциллограммы показаний индукционных катушек и термопар. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют показаниям нижней, средней и верхней индукционных катушек.

На рис. 2 представлена характерная осциллограмма, полученная в результате проведенных экспериментов. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют показаниям индукционных датчиков. Всплески на кривых 1, 2 и 3 связаны с прохождением через осевое пространство индукционных катушек паровых пузырьков. Измерения проводились в интервале температур жидкости от $80^o$ C до $130^o$ C. Частота отрыва пузырьков пара рассчитывалась как отношение числа всплесков к определенному интервалу времени кипения. Результаты подсчета частоты образования пузырьков пара приведены на рис. 3. Кривые 1, 2, 3, 4 и 5 соответствуют частоте отрыва пузырьков пара от теплоотдающей поверхности в условиях наложения однородного внешнего магнитного поля с интенсивностью 0,037; 0,098; 0,125; 0,150; 0,175 Тесла соответственно.

Как видно из рис. 3 однородное магнитное поле слабо влияет на частоту отрыва пузырьков пара при температурах кипящей жидкости $\sim 100^o$ C. С увеличением интенсивности приложенного магнитного поля в интервале температур жидкости от $100^o$ C до $113^o$ C происходит более, чем двукратное увеличение частоты отрыва пузырьков пара. Это влияние оказывается немонотонным. Увеличение частоты образования пузырьков пара происходит в интервале полей от 0 до 0,1 Т. В полях с интенсивностью более 0,15 Т частота образования пузырьков пара уменьшается. Кривая 5 на рис. 3 показывает, что поле свыше 0,175 Т подавляет процесс кипения. Пузырьки начинают возникать при температурах жидкости выше $110^o$ C.

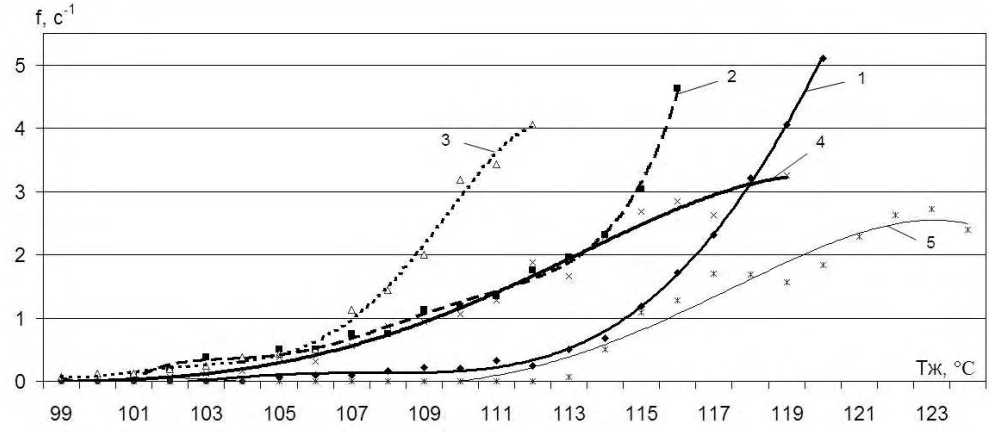



Рис. 3 — Экспериментально найденные зависимости частоты образования пузырьков пара f, при кипении магнитной жидкости в однородном внешнем магнитном поле интенсивностью: 0,037; 0,098; 0,125; 0,150; 0,175 Тесла для кривых 1,2,3,4 и 5 соответственно. Здесь Тж — температура магнитной жидкости.

## К ВОПРОСУ О КАПИЛЛЯРНЫХ ЯВЛЕНИЯХ В ЖИДКИХ ДИСПЕРСНЫХ НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ СИСТЕМАХ*

**А.Я. Симоновский, Е.П. Ярцева**

Ставропольский государственный университет, E-mail: yartseva_elena@mail.ru

Экспериментально изучается влияние однородного магнитного поля на объем отрывающейся капли магнитной жидкости, подвешенной на немагнитной горизонтальной стенке. Магнитная жидкость - жидкий намагничивающийся коллоид (магнетит в керосине). Данный вопрос представляет интерес в связи с моделированием процесса отрыва пузырька пара при кипении магнитной жидкости на горизонтальной немагнитной стенке. Ранее изучался вопрос о влиянии неоднородного магнитного поля на частоту образования и отрывной диаметр паровых пузырьков при кипении магнитной жидкости на одиночном центре парообразования [1] . Обсуждался механизм влияния неоднородного магнитного поля на частоту образования и отрывной диаметр пузырька пара в кипящей магнитной жидкости. В настоящей работе предпринята попытка моделирования процесса парообразования, в частности, отрывного диаметра пузырька пара при кипении магнитной жидкости в однородном магнитном поле. Так как магнитная жидкость является непрозрачной средой, то традиционные оптические методы наблюдения за ростом и отрывом пузырьков пара при кипении магнитной жидкости не применимы. В связи с этим в приведенных в данной работе модельных экспериментах использовалась известная аналогия [2] между процессами отрыва газового пузырька в жидкости и отрыва взвешенной в газе капли жидкости.

Схема экспериментальной установки представлена на рис. 1. Накопительная камера немагнитного цилиндрического контейнера 1 заполнялась с помощью шприца 2 магнитной жидкостью. Через канал 3 капиллярного размера магнитная жидкость под воздействием силы тяжести свободно вытекала на нижнюю торцевую поверхность контейнера. На нижнем плоском торце немагнитного контейнера формировалась под-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 05-01-00839.

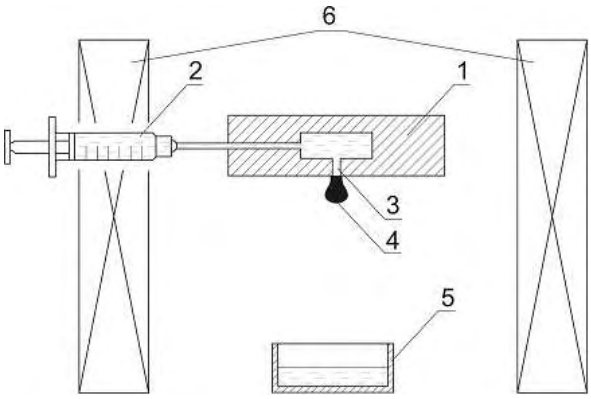



Рис. 1. Схема экспериментальной установки. 1 - немагнитный контейнер с накопительной емкостью, 2 - шприц, 3 - капиллярное отверстие, 4 - капля магнитной жидкости, 5 - накопительная емкость, 6 - катушки Гельмгольца.

вешенная капля магнитной жидкости 4. При достижении каплей определенного объема она отрывалась и попадала в накопительную кювету. Объем жидкости в накопительной кювете взвешивался на аналитических весах. По известному числу капель в накопительной кювете и известной плотности жидкости определялся средний объем отрывающейся капли. Измерение объема отрывающейся капли проводилось как без включения магнитного поля, так и при включенном магнитном поле. Однородное магнитное поле создавалось катушками Гельмгольца 6. Использовалась магнитная жидкость N 1 на основе керосина с плотностью 1,447 г/см $^3$. Эта жидкость считалась концентрированной. Концентрированная жидкость подвергалась разбавлению керосином в два и в четыре раза. В результате было получено еще два состава жидкости с плотностью 1,030 г/см$^3$ и 0,900 г/см$^3$ для жидкостей N 2 и N 3 соответственно.

На рис. 2 представлены графики зависимости объема отрывающейся капли магнитной жидкости от величины приложенного магнитного поля. Кривые 1, 2 и 3 соответствуют изменению объема капли магнитной жидкости от величины приложенного магнитного поля для жидкостей N 1, N 2 и N 3 соответственно. Из рисунка видно, что с увеличением интенсивности приложенного магнитного поля объем отрывающейся капли магнитной жидкости N 1 возрастает в 6 раз. Объем отрывающейся капли магнитной жидкости N 2 увеличивается в 2 раза. Возрастает и объем отрывающейся капли магнитной жидкости N 3 от величины приложенного однородного магнитного поля.

Отрыв капли подвешенной магнитной жидкости происходит в момент нарушения равенства капиллярных сил, удерживающих каплю на плоской поверхности подвеса и силы тяжести, стремящейся оторвать каплю от поверхности. В традиционно проводимых экспериментах по изучению поверхностного натяжения методом взвешенной капли капля располагается на торце капилляра и величина капиллярных сил, удерживающих каплю на поверхности не зависит от величины приложенного магнитного поля, так как при этом не изменяется смоченный жидкостью периметр поверхности отрыва. В наших экспериментах поверхность, смачиваемая жидкостью была неограниченна. Это обстоятельство и приводило к наблюдаемым в экспериментах изменениям объема отрывающейся капли в результате приложения горизонтального однородного

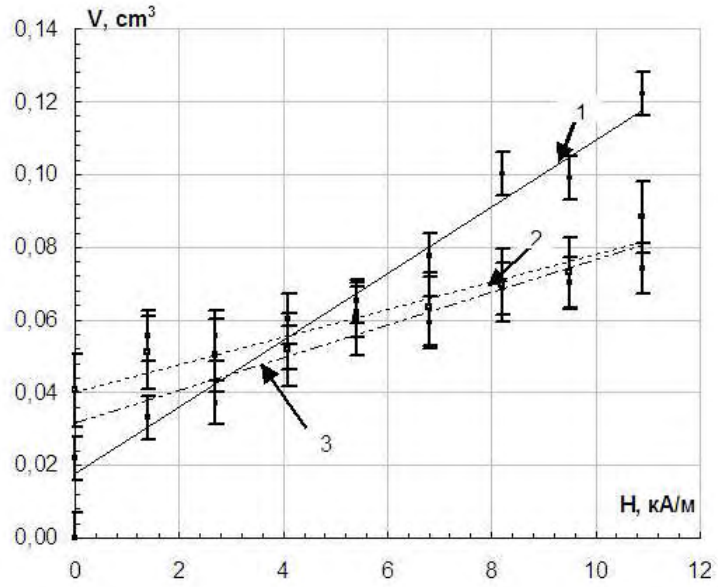



Рис. 2. Зависимость объема V отрывающейся капли магнитной жидкости от величины приложенного однородного магнитного поля. Кривые 1, 2, 3 соответствуют каплям магнитных жидкостей N1, N2 и N3.

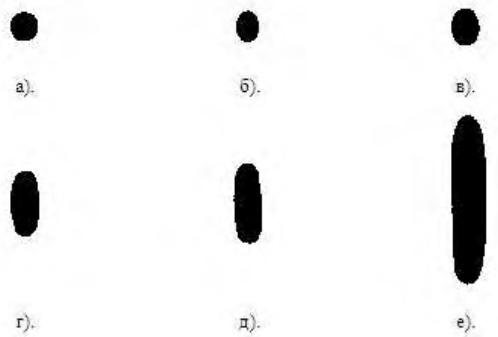



Рис. 3. Изображения торца ножки, взвешенной на немагнитной поверхности капли магнитной жидкости. Рис. а), б), в), г), д), е) соответствуют форме торца ножки капли магнитной жидкости в магнитных полях 0; 1,4; 2,7; 4,1; 5,4; 6,8; 8,2; 9,5; 10,9; 12,3; 13,6 кА/м соответственно.

магнитного поля. В горизонтальном однородном магнитном поле на каплю магнитной жидкости не действуют силы имеющие составляющую вертикального направления. Однако, горизонтальное однородное магнитное поле приводит к существенной деформации капли в направлении поля. Осесимметричная капля приобретает вытянутый вдоль направления приложенного магнитного поля вид. И, что самое главное, вдоль направления приложенного магнитного поля вытягивается и основание капли. Увеличивается периметр смачивания каплей магнитной жидкости горизонтальной плоской поверхности. За счет этого увеличивается величина капиллярных сил, удерживающих каплю магнитной жидкости на поверхности подвеса. На рис. 3 приведены изображения основания капли магнитной жидкости на поверхности подвеса. Из рис. 3 видно, что основание ножки капли удлиняется в направлении приложенного магнитного поля,

при этом увеличивается и периметр смачивания каплей поверхности подвеса.

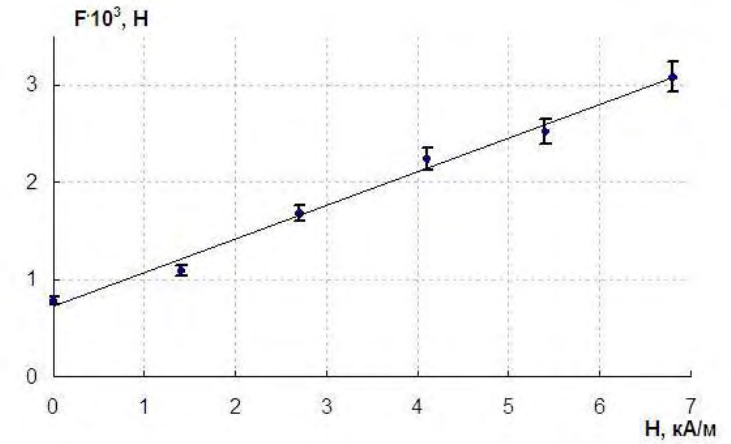



Рис. 4. Зависимость величины капиллярной силы, удерживающей каплю на поверхности подвеса, от интенсивности приложенного горизонтального постоянного магнитного поля для жидкости N 1.

График изменения величины капиллярной силы, удерживающей каплю во взвешенном состоянии, в зависимости от величины приложенного магнитного поля показан на рис. 4. Капиллярная сила вычислялась по величине периметра смоченной поверхности подвеса, как произведение периметра на величину поверхностного натяжения жидкости. Поверхностное натяжение магнитной жидкости, применяемой в эксперименте, составляло 0,028 Н/м. Из рис. 4 видно, что изменению капиллярной силы в определенное число раз соответствует такое же изменение объема отрывающейся капли, показанное на рис. 2.

На основании результатов этих экспериментов можно сделать предположение, что и пузырек пара в кипящей магнитной жидкости может увеличиваться в объеме при отрыве в результате приложенного однородного магнитного поля.

# Список литературы

[1] *В.В. Гогосов, А.Я. Симоновский.* Экспериментальная установка, методика и результаты измерения образования пузырьков пара при кипении магнитных жидкостей. // Магнитная гидродинамика. 1993. No 2. С. 62–68.

[2] *А. Адамсон.* Физическая химия поверхностей. М.: Мир. 1979. 568 с.

# Математические методы в экономике

## ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАБИЛЬНОГО ПРОИЗВОДСТВА

**Д.Н. Качевский**

Чувашская государственная сельскохозяйственная академия, г. Чебоксары

Построена динамическая модель стабильно работающего в условиях рынка предприятия (когда рост потока затрат $x$ сопровождается ростом потока дохода при фиксированном спросе $C$ на продукцию предприятия). Производство описывается с помощью ИПФ-интенсивной производственной функции $y = y(x)$.

**1. Построение интенсивной производственной функции (ИПФ).** Определим стабильно работающее предприятие как предприятие, затраты которого в основном направлены на создание конечного продукта, (а не на переустройство предприятия, или его модернизацию с остановкой производства и проч.), работающее таким образом, что с ростом потока затрат (инвестиционного потока) растет и поток дохода предприятия при фиксированном спросе на его продукцию, откуда и эластичность $E_x y = d\ln y/d\ln x$ ($\equiv 1/E_y x$) потока дохода к инвестиционному потоку также положительна.

Принимая во внимание *эффект масштаба* — зависимость издержек производства от роста масштабов производства, введем понятие *реакции рынка* $F(x)$ как некоторой обобщенной силы, зависящей от потока затрат и вызывающей со стороны внешнего рынка и со стороны внутренних производственных процессов указанный эффект. Имеет место равенство:

$$E_y E_y x = F(x), \tag{1}$$

где левая часть выражения, представляющая собой вторую эластичность потока затрат к потоку дохода $d\ln E_y x/d\ln y$.

Для задания реакции рынка введем понятие *конкурентоспособностии* предприятия $k$ как эластичности реакции рынка к потоку затрат:

$$k = E_x F = d\ln F/d\ln x. \tag{2}$$

Будем далее рассматривать работу предприятия при постоянной конкурентоспособности $k = \text{const} \geqslant 0$. Тогда, решая уравнение (2) относительно $F$, для реакции рынка получаем выражение

$$F(x) = x^k/b, \tag{3}$$

где $b > 0$ — постоянная интегрирования, которую будем называть *конкурентным барьером*. Соответствующим общим решением дифференциального уравнения (1) будет ИПФ

$$y = C(1 + Akbx^{-k})^{-1/Ak}; \tag{4}$$

здесь $C \geqslant 0$, $A \geqslant 0$ — постоянные интегрирования. $C$ — объем рынка (спрос), $A$ — *административный талант*. Если отсутствует реакция рынка, $F = 0$, то решением уравнения (1) будет известная производственная функция Кобба-Дугласа $y = Bx^\alpha$.

Для случая, когда постоянная $A = 0$, производственная функция принимает вид:

$$y = C \exp(-bx^{-k}). \tag{5}$$

С увеличением конкурентоспособности $k$, предприятие с ростом инвестиционного потока быстрее осваивает весь объем рынка $C$. Аналогичная ситуация происходит и с параметром $A$. Увеличение же показателя $b$ приводит к замедлению темпа роста производственной функции с ростом инвестиционного потока.

Уравнение (1), определяющее ИПФ, может быть получено из принципа Гамильтона с функцей Лагранжа

$$L(\tau, q(\tau), q'(\tau)) = \ln q'(\tau) + F(\tau)q(\tau),$$

где $\tau = \ln x$, $q = \ln y$.

**2. Оптимизация по прибыли.** Для интенсивной производственной функции (5) инвестиционный поток $x_0$, соответствующий максимальному потоку прибыли $p_0 = y_0 - x_0$, удовлетворяет уравнению $y'(x) = 1$ [1], которое представляется в виде

$$C \exp\left(-bx_0^{-k}\right) bkx_0^{-k-1} = 1. \tag{6}$$

С использованием функции Ламберта, удовлетворяющей уравнению

$$\mathrm{LambertW}(x) \cdot \exp(\mathrm{LambertW}(x)) = x,$$

искомое решение уравнения (6) может быть представлено в явном виде:

$$x_0 = (Cbk)^{\frac{1}{k+1}} \cdot \exp\left(\frac{1}{k}\mathrm{LambertW}\left(-\frac{kb}{k+1}(Cbk)^{-\frac{k}{k+1}}\right)\right). \tag{7}$$

Само же уравнение (6) может быть представлено как

$$y_0 bkx_0^{-k-1} = 1,$$

и после логарифмирования принимает вид:

$$\ln y_0 = (k+1)\ln x_0 - \ln(bk). \tag{8}$$

Таким образом, между переменными $\ln y_0$ и $\ln x_0$ имеет место линейная связь.

Объем рынка $C$ представляет собой функцию времени. Это либо случайная функция, либо тренд $C(t)$, полученный в результатие прогноза объема рынка. Формула (7), таким образом, для найденного тренда определяет и зависимость $x_0(t)$.

По экспериментально наблюдаемой линейной связи (8) возможно определение средних значений параметров $k$, $b$ за рассматриваемый период работы предприятия, например, методом наименьших квадратов. Для измерения локальных значений параметров удобно воспользоваться *триплекс методом*, который заключается в следующем.

Пусть предприятием в течение месяца при объеме рынка $C_1$ были произведены затраты $x_1$ и получен доход $y_1$. Проведя структурный анализ продаж за этот месяц, необходимо получить еще два виртуальных значения возможных производственных

затрат предприятия $x_2$ и $x_3$, соответствующих виртуальным доходам $y_2$ и $y_3$, которые могли бы быть получены при неизменном объеме рынка $C_1$. Тогда для ИПФ (5) имеет место система трех уравнений с тремя неизвестными $k$, $b$, $C_1$:

$$y_1 = C_1 \exp(-bx_1^{-k}), \quad y_2 = C_1 \exp(-bx_2^{-k}), \quad y_3 = C_1 \exp(-bx_3^{-k}),$$

решение которой и дает возможность определить все три параметра $k$, $b$, $C_1$, соответствующих работе предприятия в течение рассматриваемого месяца.

**3. Оптимизация по рентабельности.** Для ИПФ (5) инвестиционный поток $x_r$, соответствующий максимальной рентабельности $r_{\max} = (y_r - x_r)/x_r$, удовлетворяет уравнению $xy' = y$ [1], из которого определяется значение $x_r$:

$$x_r = (bk)^{1/k}. \tag{9}$$

Соответствующие поток дохода, поток прибыли и максимальная рентабельность инвестиционного потока имеют вид:

$$y_r = C \exp(-1/k), \quad p_r = y_r - x_r, \quad r_{\max} = p_r/x_r. \tag{10}$$

Из выражения (10) следует, что оптимальный по рентабельности инвестиционный поток $x_r$, в отличии от $x_0$, не зависит от изменяющегося со временем объема рынка $C$, другое дело само значение максимальной рентабельности $r_{\max}$, которое вместе с потоком дохода $y_r$ зависят от объема рынка, а, следовательно, и от времени.

**4. Конкурентная борьба.** Пусть для предприятия с ИПФ (5)

$$y_1 = C \exp(-b_1 x_1^{-k_1}) \tag{11}$$

появляется конкурент, претендующий на тот же рынок объемом $C$, ИПФ которого при его работе в одиночку могла бы быть

$$y_2 = C \exp(-b_2 x_2^{-k_2}). \tag{12}$$

Тогда каждое из предприятий уменьшает объем рынка конкурента на величину своего дохода:

$$\begin{aligned} y_1 &= (C - y_2) \exp(-b_1 x_1^{-k_1}), \\ y_2 &= (C - y_1) \exp(-b_2 x_2^{-k_2}). \end{aligned} \tag{13}$$

Решая эту систему уравнений относительно $y_1$ и $y_2$ и вводя обозначения

$$E_1 = \exp(-b_1 x_1^{-k_1}), \quad E_2 = \exp(-b_2 x_2^{-k_2}), \tag{14}$$

находим интенсивные производственные функции предприятий в условиях кокурентной борьбы:

$$y_1 = \frac{CE_1(1 - E_2)}{1 - E_1E_2}, \quad y_2 = \frac{CE_2(1 - E_1)}{1 - E_1E_2}. \tag{15}$$

*Стратегия конкурентной борьбы:*

1) одно из предприятий, например, первое, увеличивает инвестиционный поток: $x_1 \to \infty$, второе этого не делает, тогда $E_1 \to 1$ и из уравнений (15) следует, что второе

предприятие уходит с рынка или разоряется, $y_2 \to 0$, в то время, как первое занимает весь рынок, $y_1 \to C$;

2) пусть конкурентоспособность первого предприятия больше чем второго, $k_1 > k_2$, и оба предприятия наращивают свои инвестиционные потоки: $x_1 \to \infty$, $x_2 \to \infty$. Тогда $E_1E_2 \to E_2$, откуда $y_1 \to CE_1 \to C$, $y_2 \to 0$. Таким образом, более конкурентоспособное предприятие занимает весь рынок, в то время, как другое — уходит с рынка или разоряется;

3) пусть конкурентоспособность предприятий одинакова, $k_1 = k_2 = k$, в то время как конкурентные барьеры со стороны рынка для предприятий разные: $b_1 \neq b_2$. Оба предприятия одинаково наращивают свои инвестиционные потоки: $x_1 = x_2 = x \to \infty$, тогда

$$y_1 \to \frac{CE_1 \cdot \dfrac{b_2}{x^k}}{1 - \left(1 - \dfrac{b_1}{x^k}\right)\left(1 - \dfrac{b_2}{x^k}\right)} \to \frac{C \cdot \dfrac{b_2}{x^k}}{\dfrac{b_1}{x^k} + \dfrac{b_2}{x^k}} = \frac{C\beta}{b_1}, \quad y_2 \to \frac{C\beta}{b_1}, \tag{16}$$

где *приведенный конкурентный барьер* предприятий $\beta = b_1b_2/(b_1 + b_2)$.

Таким образом, одинаково конкурентоспособные предприятия с рынка не уходят и не разоряются, а делят между собой рынок, причем больший объем рынка достается тому предприятию, для которого рыночный конкурентный барьер меньше.

В случае, если предприятия наращивают свои инвестиционные потоки независимо друг от друга, $x_1 \to \infty$, $x_2 \to \infty$, деление рынка между ними осуществляется более сложно, с учетом их инвестиционных потоков:

$$y_1 \to \frac{C\beta_x}{b_1x_2^k}, \quad y_2 \to \frac{C\beta_x}{b_2x_1^k}; \quad \left(\beta_x = \frac{b_1x_2^k \cdot b_2x_1^k}{b_1x_2^k + b_2x_1^k}\right), \tag{17}$$

т.е. чем больший барьер создает предприятию рынок, и чем больше инвестиционный поток конкурента, тем на меньшую долю объема рынка может рассчитывать предприятие.

**5. Производственная функция совместного предприятия (ИПФ СП).** Пусть два неконкурирующих предприятия с ИПФ

$$y_1 = C_1 \exp(-b_1x_1^{-k_1}), \quad y_2 = C_2 \exp(-b_2x_2^{-k_2}) \tag{18}$$

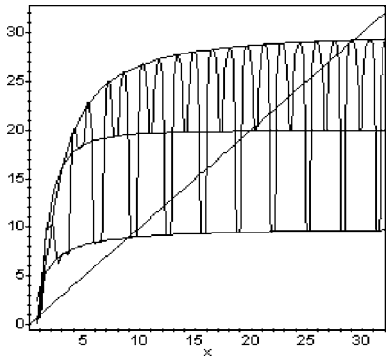
объединяются в одно совместное предприятие. Тогда ИПФ СП $y(x)$ определяется выражением

$$y(x) = y_1(x\alpha) + y_2(x(1-\alpha)) \tag{19}$$

с параметром $\alpha$, оптимизирующим распределение общего инвестиционного потока $x$ между предприятиями. В отличии от аналитического метода [1], рассмотрим графический метод нахождения ИПФ СП (19).

Множители $\alpha$ и $1-\alpha$ уравнения (19) — положительные величины, меньшие единицы. Заменим их функциями $\sin^2 mx$ и $\cos^2 mx$ с параметром $m$, который выбирается из соображения наглядности графика функции (19). Тогда ИПФ СП с оптимальным по доходу распределением инвестиций между предприятиями будет представлять собой верхнюю огибающую к графику

$$y = C_1 \exp\left(-b_1(x\sin^2 mx)^{-k_1}\right) + C_2 \exp\left(-b_2(x\cos^2 mx)^{-k_2}\right). \tag{20}$$




На рисунке верхний график представляет собой ИПФ СП (19) (верхняя огибающая к графику функции (20)), приближенно совпадает с ИПФ (5) с параметрами $k = 1,4$; $b = b_1 + b_2$; $C = C_1 + C_2$. Два нижних графика — ИПФ отдельных предприятий (18) с параметрами $k_1 = b_1 = 1$, $k_2 = b_2 = 2$, $C_1 = 10$, $C_2 = 20$.

# Список литературы

[1] *Д.Н. Качевский.* Оптимизация финансовых потоков и планов // Вестник фил. Рос. гос. соц. ун-та в г. Чебоксары. 2004. Т. 10. № 1. С. 204–211.

## МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ МНОЖЕСТВА ЭФФЕКТИВНЫХ ПОРТФЕЛЕЙ

**К.Б. Нуртазина**

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева

Осуществляется обобщение работ [3]. Сначала остановимся на отличиях в терминологии.

Дано аналитическое решение задачи с помощью функции Лагранжа. Существенным обобщением служит то, что исходя из единой аксиомы фондового рынка, получено множество утверждений о структуре фондового рынка. Через $VE$ обозначены, соответственно, корреляционная матрица рынка (она предполагается симметричной и положительно определенной) и вектор-столбец эффективностей ценных бумаг (средних доходностей), $I$ обозначает вектор-столбец, все компоненты которого равны 1, как обычно, $T$ обозначает операцию транспонирования. Введенные параметры $b = E^T V^{-1} E$, $c = I^T V^{-1} I$, $a = E^T V^{-1} I$, $d = bc - a^2$ фондового рынка дают возможность сформулировать и доказать содержательные утверждения о рынке.

Пусть $e, r$ обозначает соответственно эффективность и риск портфеля (риск отождествляется со средним квадратическим отклонением $\sigma$ доходности портфеля). Определим отношение доминирования среди портфелей, именно считаем, что портфель $P_1$ доминирует (превосходит) портфель $P_2$ если $e_1 \geq e_2$, $r_1 \geq r_2$ и хотя бы одно из этих неравенств строгое (чтобы исключить возможность доминирования портфеля самого себя). Портфель назовем недоминируемым, если не существует портфеля, который бы его доминировал. А.С.Шведов называет портфель эффективным, если он недоминируемый. Эффективные портфели у Шведова делятся на две группы: к одной

принадлежат портфели наименьшего риска при заданной эффективности, а к другой - портфели наибольшей эффективности при заданном риске. Наша терминология несколько расширена.

Интерес представляет также получение в явном виде компонент эффективного портфеля Тобина через связь доходностей рисковых бумаг с ведущим фактором рынка, за который взята средняя доходность бумаг рынка. Воспроизведем этот вывод здесь, придерживаясь, однако, наших терминологии и обозначений.

Сначала замечается, что портфель $C$, для которого коэффициент наклона $\frac{e_c-e_0}{\sigma}$ имеет максимальное среди всех портфелей значение, является оптимальным (фактически, у Шведова это определение оптимального портфеля). Оптимальный портфель находится именно как таковой. Составим функцию Лагранжа $L(X,s)=\frac{E^TX-e_0}{\sqrt{X^TVX}}+s(1-I^TX)$. Далее имеем

$$\frac{\partial L}{\partial X}=\frac{E^T(X^TVX)^{\frac{1}{2}}-(E^TX-e_0)[\frac{1}{2}(X^TVX)^{-\frac{1}{2}}2X^TV]}{X^TVX}-sI^T=0, \tag{1}$$

$$\frac{E^T(X^TVX)^{\frac{1}{2}}-(X^TVX)^{-\frac{1}{2}}X^TV(E^T-e_0)X}{X^TVX}=sI^T$$

Умножим обе части последнего равенства на $X$, и учитывая, что $I^T$=1, получим $s=\frac{e_0}{(X^TVX)^{\frac{1}{2}}}$. Найденное $s$ подставим в (1) и получим

$$E^T-e_0=X^TV\frac{E_X-e_0}{X^TVX}.$$

Обозначая константу $\frac{E_X-e_0}{X^TVX}$ через $a$ и $aX$ через $Y$, получаем систему линейных уравнений

$VY=(E^T-e_0)$(напомним, что $e_0$ -эффективность безрисковых вложений, а $E_X=E^TX$ - эффективность (неизвестная!) искомого портфеля). Осталось выразить $Y$ через беты бумаг и дисперсию $\sigma_M^2$.

В результате преобразований получим $y_kd_k+\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\beta_i\beta_k\sigma_M^2=e_k-e_0$, тогда $y_k=\frac{e_k-e_0}{d_k}-\beta_k\frac{\sigma_M^2}{d_k}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i\beta_i$. Для того, чтобы все-таки найти $y_k$ умножим каждое уравнение на $\beta_k$ и затем сложим все эти уравнения. Получим

$$\sum_{k=1}^{n}y_k\beta_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k(e_k-e_0)}{d_k}-\sigma_M^2(\sum_{i=1}^{n}y_i\beta_i)\sum_{k=1}^{n}\frac{\beta_k^2}{d_k} \tag{2}$$

откуда и находим $\sum\limits_{k=1}^{n}y_k\beta_k=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\beta_i(e_i-e_0)}{d_i}}{1+\sigma_M^2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\beta_i^2}{d_i}}$.

Подставляя это выражение в (2), получаем $y_k=\frac{\beta_k}{d_k}(\frac{e_k-e_0}{\beta_k}-A)$, где $A=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\beta_i(e_i-e_0)}{d_i}}{1+\sigma_M^2\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\beta_i^2}{d_i}}$.

Интересна роль $A$. Если предположить, что $\beta_i>0$ для всех $i=1,...n$, то при составлении оптимального портфеля $i$-я ценная бумага должна быть куплена, если $\frac{e_i-e_0}{\beta_i}>A$, а если $\frac{e_i-e_0}{\beta_i}<A$, то с этой бумагой должна быть совершена операция short-sale.

## Список литературы

[1] *А.С. Шведов.* Процентные финансовые инструменты: оценка и хеджирование. М.: ГУ-ВШЭ, 2001.

[2] *А.С. Шведов.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Изд. Дом ГУ ВШЭ, 2005.

[3] *А.С. Шведов.* Теория эффективных портфелей ценных бумаг. М.: ГУ-ВШЭ, 1999.


## ЭКСПЕРТНЫЙ МЕТОД ОЦЕНКИ ЭФФЕКТИВНОСТИ ЗАТРАТ НА УПРАВЛЕНИЕ РИСКОМ*


**С.П. Строев**

Орловский государственный университет, Орел


В работе [1] была построена иерархическая модель формирования потерь для отдельного производственного звена. Нижний уровень данной иерархии представляют факторы, оказывающие существенное влияние на величину ожидаемых потерь. Фактор в производственном цикле проявляется с некоторой интенсивностью. Предлагается использовать следующую шкалу интенсивности проявления факторов:

0 — фактор в предстоящем производственном цикле не проявится;

1 — слабая интенсивность проявления фактора;

2 — средняя интенсивность проявления фактора;

3 — сильная интенсивность проявления фактора.

Для вычисления ожидаемого значения потерь производственного звена необходимо знать вероятности того, что интенсивности проявления факторов $F_i$ $(i = 1, .., m)$ принимают указанные значения. В работе [1] была построена следующая функциональная зависимость:

$$p(z) = P(I(F_i) \geqslant l) = A_l^i + \frac{B_l^i}{C_l^i z + 1} \tag{1}$$

где $i = 1, .., m$, $l = 0, .., 3$, $A_l^i, B_l^i, C_l^i$ — некоторые положительные константы, подлежащие определению. Выражение (1) показывает вероятность того, что интенсивность $I(F_i)$ проявления фактора $F_i$ больше или равна $l$. Независимая переменная $z$ определяет величину затрат, направленных на снижение интенсивности проявления фактора.

В данной работе предлагается метод определения неизвестных параметров $A_l^i, B_l^i, C_l^i$ функциональной зависимости (1), основанный на процедуре экспертного опроса.

Для определения неизвестных параметров $A_l^i, B_l^i, C_l^i$ предлагается использовать следующую схему: если заранее известно, что для каждого значения $i = 1, .., m$ и $l = 0, .., 3$ существуют три точки $(z_0, p_0^l)$, $(z_1, p_1^l)$, $(z_2, p_2^l)$, принадлежащие кривой (1), то они удовлетворяют соотношениям:

$$p_0^l = A_l^i + \frac{B_l^i}{C_l^i z_0 + 1}, \quad p_1^l = A_l^i + \frac{B_l^i}{C_l^i z_1 + 1}, \quad p_2^l = A_l^i + \frac{B_l^i}{C_l^i z_2 + 1}. \tag{2}$$


*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных исследований, проект №06-06-96305.

Решив систему уравнений относительно $A_l^i, B_l^i, C_l^i$, найдем неизвестные параметры функции (1). Данная система имеет единственное решение. Для определения указанных точек предлагается использовать процедуру экспертного оценивания.

Прежде, чем приступить к описанию методики экспертного опроса, дадим экономическую интерпретацию точкам $(z_0, p_0^l)$, $(z_1, p_1^l)$, $(z_2, p_2^l)$: $z_t$ — величина затрат, выделяемых на антирисковые мероприятия, а $p_t^l$ — соответствующие им вероятности, где $t = 0, 1, 2$. Положим для каждого $i = 1, .., m$ и $l = 0, .., 3$ $z_0 = 0$ — затраты на проведение антирисковых мероприятий в начале производственного цикла, а $p_0^l$ — соответствующие неизвестные значения вероятностей. Значения $z_1, z_2$ и соответствующие им вероятности $p_1^l, p_2^l$ определяются экспертным оцениванием.

Опишем методику проведения экспертного опроса, предлагаемую для оценки неизвестных значений $z_1, z_2, p_0^l, p_1^l, p_2^l$. В данной работе не будут рассмотрены вопросы, связанные с формированием экспертной группы, взаимодействием между экспертами и исследователем. Пути разрешения указанных трудностей подробно представлены в [2]. Необходимо также заметить, что непосредственное численное оценивание экспертом неизвестного значения вызывает затруднения [2, 3], что влияет на адекватность получаемой информации. В связи с указанными трудностями для проведения экспертного опроса предлагается использовать процедуру метода анализа иерархических систем, разработанную Т. Саати [4, 5]. Метод анализа иерархий (МАИ) основан на обработке экспертной информации, получаемой при парном сравнении [6] элементов рассматриваемой проблемы. В рамках данного метода разработана шкала, позволяющая интерпретировать словесные высказывания экспертов в числовых значениях:
1— равная важность;
3 — умеренное превосходство одного над другим;
5 — существенное или сильное превосходство;
7 — значительное превосходство;
9 — очень сильное превосходство;
2, 4, 6, 8 — промежуточные значения между двумя соседними суждениями.

Будем считать, что сформирована группа экспертов. Предлагается следующая процедура получения экспертных суждений о неизвестных значениях $z_1, z_2, p_0^l, p_1^l, p_2^l$. На первом этапе предполагается выяснить мнения экспертов о распределении вероятностей для каждого значения интенсивности ($l = 0, .., 3$) проявления факторов $F_i$ ($i = 1, .., m$) при отсутствии затрат, направленных на антирисковые мероприятия, т. е. $z_0 = 0$. Вопрос, задаваемый экспертам может формулироваться следующим образом: «Как Вы считаете, что наиболее вероятнее: фактор $F_i$ (название фактора) не проявится (проявится со слабой, средней, сильной интенсивностями) в предстоящем производственном цикле или проявится со слабой (средней, сильной) интенсивностью?». Ответы экспертов соотносятся со шкалой Саати и записываются в матрицу парных сравнений. Обозначим ее $A^0$. Она представляет собой матрицу $4 \times 4$, где в крайнем левом столбце и верхней строке указаны значения интенсивностей. Построенная матрица будет обратносимметричной, т. е. ее элементы имеют вид $a_{ji} = \dfrac{1}{a_{ij}}$. Условно ее

можно представить следующим образом:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ 1/a_{01} & 1 & a_{12} & a_{13} \\ 1/a_{02} & 1/a_{12} & 1 & a_{23} \\ 1/a_{03} & 1/a_{23} & 1/a_{13} & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, в соответствии с процедурой Саати, необходимо найти собственный вектор, обозначим его $v^0$, матрицы $A^0$, соответствующий максимальному собственному значению $\lambda_{max}$. Для этого необходимо разрешить характеристическое уравнение. В данном случае это уравнение 4-ой степени. Однако на практике обычно применяется следующий алгоритм [5]: возводить матрицу в степени, каждая из которых представляет собой квадрат предыдущей; строчные суммы вычисляются и нормализуются. Вычисления по указанной итерационной процедуре прекращаются, когда разность между этими суммами в двух последовательных вычислениях меньше заранее заданной величины. Таким образом, компоненты найденного вектора будут представлять собой экспертную оценку искомых вероятностей, соответствующую значениям интенсивности ($l = 0, .., 3$), т. е. выражения для неизвестных значений $p_0^l$ имеют следующий вид [1]:

$$p_0^0 = 1; \quad p_0^1 = v_2^0 + v_3^0 + v_4^0; \quad p_0^2 = v_3^0 + v_4^0; \quad p_0^3 = v_4^0, \tag{3}$$

где $v_j^0$ ($j = 1, .., 4$) $j$-тая координата вектора $v^0$. Анализ согласованности экспертов также проводится в соответствии с процедурой Саати [5]. Для этого необходимо вычислить величину $(\lambda_{max} - n)/(n - 1)$ называемую индексом согласованности (ИС). По таблице, приведенной в [5], находим значение случайного индекса (СИ), соответствующего размерности матрицы парных сравнений. Отношение ИС к СИ дает величину, называемую отношением согласованности (ОС). Значение ОС меньшее или равное 0,10 будем считать приемлемым. В случае «неудовлетворительной» согласованности в ряде источников указаны меры по «улучшению качества» информации, получаемой от экспертов [2, 4, 6], например, ознакомление экспертов с дополнительной информацией.

Итак, на первом этапе получили экспертную оценку неизвестных значений функции (1) при аргументе $z = 0$, соответствующих каждому значению интенсивности ($l = 0, .., 3$) и фактору $F_i$ ($i = 1, .., m$).

На втором этапе необходимо выяснить экспертные предпочтения относительно распределения вероятностей для величины затрат равной $z_1$. Однако, указанная величина является неизвестной. Для ее определения предлагается провести экспертный опрос, целью которого будет выявление мероприятий, проведение которых позволит снизить ожидаемые потери. Вопрос, задаваемый экспертам, может быть сформулирован следующим образом: «Как Вы считаете, какие антирисковые мероприятия позволят снизить величину ожидаемых потерь до приемлемого уровня?» Стоимостная оценка выявленных мероприятий даст значение величины $z_1$. Далее, используя процедуру экспертного опроса, описанную выше, получим вектор распределения вероятностей, обозначим его $v^1$, соответствующий величине затрат равной $z_1$. Тогда формулы для неизвестных вероятностей $p_1^l$ имеют вид [1]:

$$p_1^0 = 1; \quad p_1^1 = v_2^1 + v_3^1 + v_4^1; \quad p_1^2 = v_3^1 + v_4^1; \quad p_1^3 = v_4^1, \tag{4}$$

где $v_j^1$ $(j = 1, .., 4)$ $j$-тая координата вектора $v^1$.

На третьем этапе аналогичным образом определяем величину затрат $z_2$ и соответствующий ей вектор распределения вероятностей $v^2$. В данном случае, однако, величина затрат $z_2$ будет выражать стоимостную оценку предполагаемых антирисковых мероприятий, проведение которых позволит снизить уровень ожидаемых потерь до минимума. В связи с этим, вопрос может быть сформулирован следующим образом: «Как Вы считаете, проведение каких еще антирисковых мероприятий позволит снизить уровень ожидаемых потерь до минимума?» Формулы для неизвестных значений вероятностей $p_2^l$ [1]:

$$p_2^0 = 1; \quad p_2^1 = v_2^2 + v_3^2 + v_4^2; \quad p_2^2 = v_3^2 + v_4^2; \quad p_2^3 = v_4^2, \tag{5}$$

где $v_j^2$ $(j = 1, .., 4)$ $j$-тая координата вектора $v^2$.

Таким образом, в результате проведения экспертного опроса для каждого значения интенсивности $(l = 0, .., 3)$ и номера фактора $F_i$ $(i = 1, .., m)$ получили три точки $(z_0, p_0^l)$, $(z_1, p_1^l)$, $(z_2, p_2^l)$, принадлежащие кривой (1). Так как данные точки удовлетворяют системе (2) то, разрешив ее относительно неизвестных $A_l^i, B_l^i, C_l^i$ для каждого $i = 1, .., m$ и $l = 0, .., 3$, найдем неизвестные параметры функции (1).

# Список литературы


[1] *А.Б. Секерин, С.П. Строев.* Оптимизационная модель управления риском на уровне производственного звена промышленного предприятия. // Наука и образование. Экономика и управление 2006. №1

[2] *С.Д. Бешелев, Ф.Г. Гурвич.* Математико-статистические методы экспертных оценок. - 2-е изд., перераб., и доп. - М.: Статистика, 1980. - 263 с.

[3] *Э.П. Райхман, Г.Г. Азгальдов.* Экспертные методы в оценке качества товаров. М., Экономика, 1974. - 151 с.

[4] *Т. Саати, К. Керис.* Аналитическое планирование. Организация систем. Пер. с англ. - М.: Радио и связь. 1991. - 224 с.

[5] *Т. Саати.* Принятие решений. Метод анализа иерархий. Пер. с англ. - М.: Радио и связь. 1993. - 320 с.

[6] *Г. Дэвид.* Метод парных сравнений. Пер. с англ. Н. Космарской, Д. Шмерлинга. Под. ред. Ю. Адлера. С прил. к русскому переводу. М.: Статистика. 1978. - 144 с.


## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИНВЕСТИЦИЙ В ОБЕЗЛИЧЕННЫЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ СЧЕТА


**Г.А. Хакимова**

Уфимский государственный авиационный технический университет, г. Уфа


### Введение

Рассматривается математическая модель инвестиции в обезличенные металлические счета физическими лицами. Обезличенный металлический счет (ОМС) дает возможность оперативно реагировать на изменение цен - покупать и продавать металлы:

золото, серебро, палладий и платину. В последнее время наблюдается значительная амплитуда колебаний цен на рынке драгоценных металлов при общей тенденции к росту [1].

Операции с ОМС совершаются по котировкам, устанавливаемым Башкирским отделением Сбербанка России ежедневно в зависимости от действующих учетных цен Центрального банка РФ на драгоценные металлы. Разница между ценой покупки и продажи - спрэд - для каждого металла различна и составляет от 6 до 11 процентов.

Основные условия открытия ОМС для физических лиц: открытие - закрытие счета - бесплатно; минимальный взнос не устанавливается; срок вложения не ограничен; начисляемый процент не начисляется. Клиент получает доход только от изменения цены на драгоценные металлы. Основным преимуществом ОМС от других операций с драгоценными металлами является отсутствие базы для обложения НДС и отсутствие трудностей по обеспечению сохранности металла.

**Математическая модель совершения операции покупки - продажи ОМС**

Пусть $x_i\,(j)$- цена продажи одного грамма $i$ - того металла в $j$ - тый день; $i = 1 \div n$, $n-$количество видов драгоценных металлов; здесь $i = 1$ - золото, $i = 2$ - серебро, $i = 3$ - палладий, $i = 4$ - платина; $n = 4$. Тогда цена покупки физическим лицом одного грамма того же металла $y_i\,(j)$ будет определяться по формуле

$$y_i\,(j) = x_i\,(j) + \frac{s_i \cdot x_i\,(j)}{100},$$

где $s_i$- спрэд для $i$ - того металла. Например, $s_1 = 6\%$, $s_2 = 8\%$, $s_3 = 11\%$, $s_4 = 11\%$.

Пусть $m_i$- масса $i$ - того металла, купленного физическим лицом $i = 1 \div n$ в $j$ - тый день. Стоимость $C_{i0}$ $i$ - того металла на день покупки $j_{0i}$ определяется по формуле

$$C_{i0} = m_i \cdot y_i\,(j_{0i})\,.$$

Стоимость $C_i$ $i$ - того металла на $j$- тый день определяется

$$C_i = m_i \cdot x_i\,(j)\,.$$

Отношение разницы между ценой продажи и покупки одного грамма $i$ - того металла к цене покупки в процентах $p_i$ определяется по формуле

$$p_i\,(j) = \frac{x_i\,(j) - y_i\,(j_{0i})}{y_i\,(j_{0i})} \cdot 100, \%.$$

Величина процента годовых $p_{ig}$ для $i$ - того металла определяется из выражения

$$p_{ig}\,(j) = \frac{x_i\,(j) - y_i\,(j_{0i})}{y_i\,(j_{0i})} \cdot \frac{100 \cdot N}{j - j_{0i}}, \%,$$

где $N$ - количество банковских дней в году. Сумма выручки $Z_i$ составляет

$$Z_i = C_i - C_{i0}.$$

Выбор дня $j_{0i}$ для начала инвестиций по $i$ - тому металлу определяется из анализа графика $x_i(j)$ в течении нескольких лет.

Условием выхода на банковский процент $p_b$ является следующее соотношение

$$p_b = p_i.$$

При выполнении условия $p_i \geqslant p_b$ важным являются показатели $\frac{dp_i}{dj}$, $\frac{dp_{ig}}{dj}$, которые находятся по формулам

$$\frac{dp_i}{dj} = \frac{dx_i(j)}{dj} \cdot \frac{100}{y_i(j_{0i})},$$

$$\frac{dp_{ig}}{dj} = \frac{dx_i(j)}{dj} \cdot \frac{100 \cdot N}{y_i(j_{0i}) \cdot (j - j_{0i})} - \frac{x_i(j) - y_i(j_{0i})}{y_i(j_{0i})} \cdot \frac{100 \cdot N}{(j - j_{0i})^2} =$$
$$= \frac{100 \cdot N}{y_i(j_{0i}) \cdot (j - j_{0i})} \cdot \left[ \frac{dx_i(j)}{dj} - \frac{x_i(j) - y_i(j_{0i})}{(j - j_{0i})} \right].$$

**Алгоритмы управления покупкой и продажей драгоценных металлов**

1. Дробление массы $i$ - того металла для фиксации частичной выручки, например, дробление на два.

2. Поиск локальных колебаний большой амплитуды $a_i$ для повторного инвестирования. При этом должно выполняться условие $a_i \geqslant s_i$.

3. Нахождение максимумов разностей $p_i - p_{i-1}$, $p_i - p_{i-2}$, $p_i - p_{i-3}$ для изучения возможности изменения инвестируемой единицы $i$.

**Показатель эффективности инвестиций**

Основным показателем эффективности инвестиций является приведенная масса какого - либо металла, например, 1 - го металла

$$M_1(j) = m_1(j) + \frac{m_2(j) \cdot x_2(j)}{x_1(j)} + \frac{m_3(j) \cdot x_3(j)}{x_1(j)} + \frac{m_4(j) \cdot x_4(j)}{x_1(j)}.$$

Скорость увеличения массы 1 - го металла при пассивном управлении находится дифференцированием предыдущей формулы.

Данная методика реализована в виде программы для анализа вышеназванных величин. Требуется эксплуатация этой программы для проверки ее практической эффективности.

# Список литературы

[1] *С.А. Филин.* Управление инвестициями в инновационной сфере экономики в условиях риска и неопределенности. - М.: Роспатент, 2004. - 472 с.

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРЕДПРИЯТИЯ-ЗАЕМЩИКА НА ОСНОВЕ ОБОБЩЕННО-РЕСУРСНОГО ПОДХОДА

**М.В. Верижников**
Орловский государственный университет, г. Орел

В последние годы в России наблюдается постепенное расширение сферы банковских услуг, в частности, развивается система кредитования. В связи с этим растет спрос на современные, эффективные и научно обоснованные методы управления банковским кредитным риском.

Одним из главных вопросов, на которые должны отвечать эти методы, является вопрос о размере выдаваемого кредита, обеспечивающем оптимальный (в смысле максимизации дохода банка) уровень риска. При этом, по мнению банковских специалистов, в теоретической базе отечественной системы кредитования не существует универсального метода определения экономически обоснованной суммы кредита. Таким образом, можно констатировать, что оптимизация размера кредита является в настоящее время актуальной практической проблемой.

В настоящей статье рассматривается экономико-математическая модель предприятия-кредитополучателя, используемая в одном из методов расчета оптимального кредитного предложения. Речь идет об алгоритме, предложенном в [1, с.124-136], модифицированном в [2, с.144-153] и получившем дальнейшее развитие в [3, с.113-122].

В последнем варианте метод предназначен для решения следующей задачи. Перед банком стоит вопрос о предоставлении кредита группе предприятий одного профиля, действующих в сходных экономических условиях. Требуется максимизировать ожидаемый доход банка от этой операции в предположении, что кредит должен быть погашен единовременно в конце периода кредитования. Для этого на основе статистических данных по данной группе заемщиков строится функция $g(x)$ плотности распределения объема ликвидных средств на момент возврата кредита. Затем оптимальный размер кредита $C_0$ находится как единственное решение уравнения

$$(1+r)\int_{C(1+r)}^{\infty} g(x)dx-(1+R)=0,$$

где $r$ – процентная ставка по межбанковским кредитам, $R$ - процентная ставка по предоставляемому кредиту.

Одним из важнейших элементов предложенной методики является ресурсная модель предприятия-заемщика, которая позволяет прогнозировать наличие ликвидных средств у предприятия на конец периода кредитования, и на основе которой находится функция $g(x)$. На наш взгляд, модель, применяемая в [3], не вполне адекватна поставленной задаче. Главным ее недостатком является использование валовой прибыли в качестве итогового показателя, характеризующего денежные средства, которые могут быть направлены на погашение кредита. Несмотря на то, что прибыль достаточно тесно связана с ресурсами предприятия, она отражает лишь начисленные, а не реально полученные деньги. В результате искомый объем ликвидных средств искажается, поэтому применение модели возможно лишь с существенными оговорками.

В модели, предлагаемой далее, указанный недостаток был устранен. Соответственно изменился и состав входных переменных-ресурсов.

Положения (П) и гипотезы (Г), лежащие в основе модели, таковы:

П-1. Объектом моделирования является предприятие-заемщик, а именно генерируемые и потребляемые им денежные потоки.

П-2. Цель моделирования – определить величину $Y$ денежных средств, которые заемщик будет способен потратить на погашение кредита в конце периода кредитования.

Г-1. Предполагается, что эта величина прогнозируема, т.е. существует причинно–следственная связь между $Y$ и параметрами заемщика $X_1,\ldots,X_N$, известными на начало периода кредитования. При этом вид связи, вообще говоря, зависит от конкретного предприятия.

Г-2. Предполагается, что внутри групп заемщиков, полученных фиксированием таких параметров $X_i$, как географическое положение, вид и масштаб экономической деятельности, вид зависимости между $Y$ и прочими параметрами $X_1,\ldots,X_n$ меняется достаточно мало и может считаться неизменным. Математически эта зависимость выражается формулой $Y=F(X_1,\ldots,X_n)$, где $F$ - некоторая функция, заданная явным или неявным образом.

П-3. Основным источником информации для формирования величин $Y$ и $X_1,\ldots,X_n$ должна выступать публичная бухгалтерская отчетность предприятий, предоставляемая ими в органы статистики. Это связано с тем, что применение описываемой модели предусматривает возможность получения кредитором статистических данных по достаточно большому числу (несколько десятков и более) предприятий, причем далеко не все они могут являться даже потенциальными клиентами данного кредитора. Если же все предприятия, входящие в выборку, принадлежат к числу клиентов банка, то для анализа может быть привлечена дополнительная информация.

Г-3. Поток денежных средств за период кредитования определяется, в первую очередь, экономическим потенциалом предприятия на начало периода. Показатели, описывающие экономический потенциал предприятия, будем называть ресурсами в расширенном смысле. Они делятся на 2 типа: 1) собственно ресурсы, понимаемые в обычном экономическом смысле (материальные, финансовые, трудовые и природные), в стоимостном выражении; 2) псевдоресурсы – прочие параметры предприятия, которые также характеризуют его способность получать доход, но которые, строго говоря, нельзя отнести к ресурсам (например, относительные показатели). Модель с использованием ресурсов в расширенном смысле будем называть обобщенно-ресурсной.

Вид модели зависит от возможностей банка по привлечению дополнительных источников информации, от отраслевой принадлежности потенциальных заемщиков, от существующих требований к предоставляемой этими предприятиями отчетности, от горизонта прогнозирования (периода кредитования) и от типа выдаваемого кредита.

Объем статьи не позволяет рассмотреть все возможные ситуации. Поэтому разберем основы построения базовой модели, в которой период кредитования равен году и начинается в начале отчетного года, кредит должен быть возвращен полностью в его конце, а для исследования, кроме годовой бухгалтерской отчетности, возможно привлечение дополнительной бухгалтерской информации о численности сотрудников предприятия. Прочие варианты модели несложно получить из базовой спецификации, руководствуясь приведенными выше гипотезами и положениями.

Общий вид базовой модели:

$$Y = F\,(P_{ВНЕОБ},\ P_{ЗАП},\ P_{НАЛОГ},\ P_{ФИН},\ Т,\ Д,\ К_{ЭР},\ К_{СЗ}).$$

Рассмотрим каждый компонент модели подробно.

Итоговый показатель $Y$ должен представлять собой денежные средства, которые организация способна потратить на возврат кредита в конце периода кредитования. Общий принцип составления этого показателя следующий. Складываются все доходы предприятия и вычитаются обязательные расходы, без которых эти доходы не могут быть получены. Не прибавляются трудно прогнозируемые доходы, например, страховые выплаты и курсовые разницы. Не вычитаются расходы, которые заемщик может не нести до расчета по кредитному долгу.

При формировании переменных модели на основе публичной бухгалтерской отчетности показатель $Y$ составляется по форме №4 «Отчет о движении денежных средств». Эта форма предоставляется в органы статистики ежегодно крупными и сред-

ними предприятиями. Поскольку доход предприятия за год неотделим от понесенных им расходов, в соответствии с приведенным принципом построения, необходимо использовать совокупный чистый денежный поток за год в качестве отправной точки для расчетов. В форме №4 он указан в строке «Чистое увеличение (уменьшение) денежных средств и их эквивалентов». Кроме того, к чистому притоку денежных средств должен быть добавлен их остаток, имеющийся у предприятия на начало периода кредитования. Т.е. фактически получаем результат по строке «Остаток денежных средств на конец отчетного периода». В базовой модели, с учетом возможностей, предоставляемых «Отчетом», мы имеем возможность скорректировать эту сумму только на величину налогов, учтенных в денежном потоке в качестве расходов, но реально уплачиваемых в то же время, что и возвращаемый кредит. Организация платит налоги ежемесячно, за исключением транспортного и налога на землю, которые уплачиваются раз в год. Поэтому на момент погашения кредита в конце года у организации все еще остается в среднем 1/12 часть налоговых отчислений в бюджет, сделанных ею за весь год и отраженных в форме №4 в строке «Денежные средства, направленные на расчеты по налогам и сборам». Таким образом, для получения показателя *Y* нужно к величине, указанной в строке «Остаток денежных средств на конец отчетного периода» прибавить 1/12 величины в строке «Денежные средства, направленные на расчеты по налогам и сборам»:

$$Y \equiv Д_{КГ} + НО_{Г}/12,$$

где $Д_{КГ}$ – денежные средства на конец года, $НО_{Г}$ – налоговые отчисления за год.

Перейдем теперь к составу входных показателей – ресурсов, которыми обладает предприятие на начало года. Основой для их построения служит форма №1 «Бухгалтерский баланс», а также «Справка о ценностях на забалансовых счетах», в которой отражены ресурсы, не принадлежащие предприятию, но используемые им для получения дохода.

В зависимости от типа влияния на итоговый показатель ресурсы целесообразно сгруппировать, объединив статьи баланса в агрегированные переменные. Минимизация количества переменных, кроме того, благоприятно сказывается на скорости работы и результативности вычислительных алгоритмов, применяемых для соответствующей обработки статистических данных.

К 1-ой группе отнесем ресурсы, характеризующие внеоборотные активы:

$$Р_{ВНЕОБ} \equiv НМА + ОС + ПрВнА + АрОС,$$

где $Р_{ВНЕОБ}$ – ресурсы, влияющие на *Y* как внеоборотные активы, постепенно переносящие на него свою стоимость, *НМА* – статья «Нематериальные активы на начало года», *ОС* – статья «Основные средства на начало года», *ПрВнА* – статья «Прочие внеоборотные активы на начало года», *АрОС* – статья «Арендованные основные средства на начало года».

Ко 2-ой группе относятся ресурсы, характеризующие товарно-материальные запасы:

$$Р_{ЗАП} \equiv З + ТК,$$

где $Р_{ЗАП}$ – ресурсы, участвующие в кругообороте как оборотные фонды, *З* – статья «Запасы, всего, на начало года», *ТК* – статья «Товары, принятые на комиссию, на начало года».

3-я группа показателей – псевдоресурсы, влияющие на доходы опосредованно, уменьшая величину расходов на налоги:

$$Р_{НАЛОГ} \equiv ОНА – ОНО,$$

где $Р_{НАЛОГ}$ – активы, принимаемые во внимание при формировании налогооблагаемой прибыли, *ОНА* – «Отложенные налоговые активы на начало года», *ОНО* – статья «Отложенные налоговые обязательства на начало года».

В 4-ю группу объединены финансовые ресурсы и прочие активы, приносящие доход в виде процентов и дивидендов:

$$Р_{ФИН} \equiv ДВМЦ + ДФВ + КрФВ + ДЗ – СпДЗ,$$

где *ДВМЦ* – «Доходные вложения в материальные ценности на начало года», *ДФВ* – «Долгосрочные финансовые вложения на начало года», *КрФВ* – «Краткосрочные финансовые вложения на начало года», *ДЗ* – «Дебиторская задолженность (платежи ожидаются в течение 12 месяцев после отчетной даты), на начало года», *СпДЗ* - «Списанная в убыток задолженность неплатежеспособных дебиторов на начало года».

Последний показатель отражает дебиторскую задолженность, по которой истек срок исковой давности. Наличие списанной задолженности свидетельствует о том, что руководство предприятия неэффективно выбирает контрагентов, а также не имеет достаточных возможностей для взыскания долгов. Чем выше значение этого показателя, тем больше вероятность того, что и в отчетном периоде предприятие недополучит доход.

*Т* – отдельный показатель, описывающий степень привлечения предприятием трудовых ресурсов. На наш взгляд, наиболее адекватным показателем использования труда остается среднесписочная численность работников, которая при возможности должна обязательно включаться в модель.

Следующей входной переменной выбрана статья «Денежные средства на начало года». Этот ресурс не входит ни в одну из рассмотренных групп, поскольку, помимо своего собственного специфического влияния на итоговый показатель, он может быть относительно быстро преобразован в любой другой ресурс. Влияние объема денежных средств заключается, прежде всего, в непосредственном участии этой статьи баланса в формировании *Y*:

$$Y \equiv ДС + (ЧДП + НО_Г/12),$$

где *Д* – денежные средства на начало года, *ЧДП* – совокупный чистый денежный поток за год. Кроме того, в зависимости от заключенного между предприятием и банком договора, денежные средства, размещенные на расчетном счете, могут являться источником дополнительного дохода в виде начисляемых банком процентов. Наконец, наличие определенного объема денежных средств крайне необходимо для обеспечения непрерывного кругооборота ресурсов.

Перечисленные показатели достаточно полно характеризуют потенциальную возможность заемщика получать доход на начало периода кредитования. Однако ясно, что два предприятия, обладающие равным количеством начальных ресурсов и действующие в одинаковых условиях, могут показать неодинаковые финансовые итоги. Это связано, в первую очередь, с различиями в способах управления ресурсами. Поэтому в модель добавлена группа $К_{ЭР}$ коэффициентов эффективности использования ресурсов, в качестве которых можно выбрать как стандартные коэффициенты отдачи активов ROA или Дю Пона, так и коэффициенты, связывающие прогнозируемый денежный поток с ресурсами, выбранными в качестве входных переменных. Эти коэффициенты могут быть рассчитаны как отношения итогового показателя за предыдущий отчетный период, аналогичный рассматриваемому, к средним величинам соответствующих ресурсов за этот же период. Например, для группы ресурсов $Р_{ЗАП}$ он может иметь вид:

$$К_{ЭР} \equiv (Д_{КГ} + НО_Г/12) \Big/ \frac{Р_{ЗАП}^{НГ} + Р_{ЗАП}^{КГ}}{2},$$

где $Р_{ЗАП}^{НГ}$ и $Р_{ЗАП}^{КГ}$ - значения на начало и конец года соответственно, и все показатели рассчитываются по данным предыдущего периода.

Последняя переменная в модели - коэффициент $К_{СЗ}$, характеризующий соотношение собственных и заемных средств. Он позволяет оценить расходы предприятия, связанные с наличием у него заемного капитала. $К_{СЗ}$ рассчитывается как отношение собственных средств (за вычетом добавочного капитала) к заемным (сумма итогов разделов 4 и 5 баланса):

$$К_{СЗ} \equiv (КР\text{-}ДК)/(ДО+КО),$$

где *КР* – итог раздела 3 баланса «Капитал и резервы», *ДК* – «Добавочный капитал», *ДО* и *КО* – долгосрочные и краткосрочные обязательства соответственно.

В заключение остается сказать, что для оценки практической применимости описанной модели был проведен численный эксперимент. В качестве исходной целевой группы кредитуемых предприятий рассматривалась выборка 60 крупных и средних торговых предприятий г. Орла и Орловской области, параметры которых были представлены их публичной бухгалтерской отчетностью. За начало периода кредитования положено начало 2004 г., горизонт прогнозирования взят равным 1 году.

Спецификация модели:

$$Y = F\ (P_{ВНЕОБ}, P_{ЗАП}, P_{НАЛОГ}, P_{ФИН}, Д, K_{ЭР}, K_{СЗ}),$$

где $K_{ЭР}$ был рассчитан как отношение итогового показателя за предыдущий отчетный период к средней величине ресурса $P_{ЗАП}$ за тот же период, что объясняется приоритетностью этого ресурса для предприятий торговли. Из-за отсутствия в открытом доступе данных о численности сотрудников предприятий показатель $T$ в модель включен не был.

После формирования из статей отчетности переменных, участвующих в модели, были рассчитаны обычные и частные коэффициенты корреляции между входными параметрами и итоговым показателем. Высокие (более 0,5) абсолютные значения ряда коэффициентов и значимость на уровне 0,05 некоторых частных коэффициентов корреляции свидетельствуют о достаточно тесной и даже близкой к линейной связи между соответствующими показателями. Как и ожидалось, все коэффициенты корреляции оказались положительны, что также является косвенным подтверждением адекватности модели.

**Литература**

1. Антонов М.В., Поманский А.Б. Рационирование кредита и алгоритм эффективного распределения заемных средств // Экономика и математические методы. 1994. Т.30, вып.1.

2. Бублик Н.Д., Попенов С.В., Секерин А.Б. Управление финансовыми и банковскими рисками. Учебное пособие. – Уфа: Альтернатива РИЦ, 1998. – 254 с.

3. Секерин А.Б., Верижников М.В. Применение технологии нейронных сетей и метода Монте-Карло к задаче рационирования кредита / Наука и образование. Новые технологии. Межвузовский сборник научных трудов. Выпуск №5 «Экономика и управление». – М.: ИИЦ МГУДТ, 2004.

## ПРЕДЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ФАКТОРОВ РИСК-ОЖИДАЕМЫХ СИТУАЦИЙ

**В.В. Давнис, В.И. Тинякова**

Воронежский государственный университет, г. Воронеж

Выявление факторов, порождающих риск-ситуации, и оценка их воздействия на риск и его уровень, являются одними из ключевых направлений работы по управлению риском. Несмотря на взаимосвязь этих задач и предполагаемую последовательность в их решении (выявление – оценка), достаточную завершенность, как правило, получает решение только первой из них. Решение второй задачи, по ее смыслу, должно ориентироваться на факторный анализ, который, к сожалению, в данном случае гораздо сложнее других видов анализа, поскольку один и тот же фактор в различных ситуациях может резко изменять свое воздействие на риск. Естественно, это требует специфических подходов к построению моделей, которые смогли бы обеспечить получение адекватного представления о характере и силе факторов порождающих неуверенность в результатах принимаемых решений. Поэтому большинство подходов реализует в основном качественный анализ этих факторов с привлечением экспертов для получения количественных оценок. Вероятностная природа риска и отсутствие знаний о надежных механизмах его

факторного снижения сделали доминирующей в задачах принятия решений концепцию приемлемого риска.

Ниже предлагается подход, позволяющий для ситуации, в которой принимается решение по поводу выбора одной из двух альтернатив, строить модель бинарного выбора и с ее помощью осуществлять предельный анализ степени воздействия факторов непосредственно на уровень риска. Ситуация бинарного выбора в задачах принятия решений встречается довольно часто и, по сути, является базовым элементом любой схемы управления. Кроме того, будем предполагать, что ситуации, связанные с выбором одной из двух альтернатив, повторяются неоднократно, но реальность условий, в которых принимается решение, варьирует от ситуации к ситуации. Сами условия многогранны и могут быть описаны некоторым вектором показателей $\mathbf{x} = (x_1,\ x_2, \mathrm{K}\ , x_m)$. Другими словами, имеется возможность сформировать выборочное множество наблюдений, описывающих результаты альтернативного выбора.

Как известно [2], риски принято делить на стартовые и финальные. Сразу заметим, что риск принятого решения (финальный) можно снижать путем проведения различного рода мероприятий, в то время как снижение риска принимаемого решения (стартового) достигается только за счет уточнения вероятностного распределения альтернатив. В свою очередь, вероятности зависят от условий, в которых принимается решение и, возможно, от условий, в которых принятое решение будет реализовываться. Сам механизм этой зависимости описывается следующим образом:

Пусть

$\mathrm{u}_1$ – полезность, получаемая при выборе 1-й альтернативы;

$\mathrm{u}_2$ – полезность, получаемая при выборе 2-й альтернативы.

Каждая из полезностей зависит от факторов, описывающих условия выбора, линейно, т.е.

$$\mathrm{u}_1 = \mathbf{x}\mathbf{d}_1, \qquad \mathrm{u}_2 = \mathbf{x}\mathbf{d}_2. \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{x} = (1,\ x_1,\ x_2, \mathrm{K}\ , x_m)$ – расширенная вектор-строка, как это принято в эконометрике, а $\mathbf{d}_k = (d_{k0},\ d_{k1}, \mathrm{K}\ , d_{km})'$ – вектор-столбец параметров $k$-й функции полезности.

К сожалению, в определении полезности преобладает субъективный фактор, и она, как правило, является ненаблюдаемой величиной, что исключает возможность применения эконометрических методов для оценки коэффициентов этих линейных функций. В то же время, несмотря на отсутствие формализованного представления, в каждом конкретном случае в соответствии с этими гипотетическими функциями полезности был сделан выбор наиболее предпочтительной альтернативы. Предполагая, что выбор осуществлялся рационально с ориентацией на получение наибольшей выгоды, можно записать следующее правило:

$$y = \begin{cases} 1, & \textit{при} \quad \mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 > 0 \\ 0, & \textit{при} \quad \mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Если теперь разность полезностей представить как

$$\mathrm{u}_1 - \mathrm{u}_2 = \mathbf{x}\mathbf{b} + \varepsilon, \tag{3}$$

где $\varepsilon$ – случайная ошибка, которая может быть допущена при оценке полезности выбора, то вероятность того, что предпочтение получит первая альтернатива, записывается следующим образом:

$$\mathrm{P}(y = 1) = \mathrm{P}(\varepsilon > -\mathbf{x}\mathbf{b}) = \mathrm{P}(\varepsilon < \mathbf{x}\mathbf{b}) = \mathrm{F}(\mathbf{x}\mathbf{b}). \tag{4}$$

Для рассматриваемой задачи ожидаемой полезностью выбора является условное математическое ожидание

$$\mathrm{E}(y|\mathbf{x}) = 1 \cdot \mathrm{F}(\mathbf{x}\mathbf{b}) + 0 \cdot (1 - \mathrm{F}(\mathbf{x}\mathbf{b}) = \mathrm{F}(\mathbf{x}\mathbf{b}), \tag{5}$$

которое можно понимать как нелинейную регрессию $y$ на $\mathbf{x}$, т.е.

$$y = \mathrm{F}(\mathbf{x}\mathbf{b}). \tag{6}$$

Между полезностями $u_1 = \mathbf{xd_1}$, $u_2 = \mathbf{xd}_2$ и $y = F(\mathbf{xb})$ есть принципиальное различие. С первыми двумя связан финальный риск, а с ожидаемой полезностью выбора – стартовый. Ниже будет рассмотрен предельный анализ, позволяющий понять механизм факторного снижения стартового риска.

Особо интересным и содержательно интерпретируемым предельный анализ получается, когда случайная величина $\varepsilon$ имеет логистическое распределение

$$F(\mathbf{xb}) = e^{\mathbf{xb}}(1+e^{\mathbf{xb}})^{-1}. \qquad (7)$$

Для построения логит-модели (7) используются статистические наблюдения ситуаций бинарного выбора, т.е. наблюдения, в которых значения зависимой переменной принимают всего два значения 0 и 1, а независимые являются непрерывными или категоризированными переменными. Параметры модели оцениваются с помощью метода максимального правдоподобия. Для выборочного множества наблюдений функция максимального правдоподобия записывается в виде

$$L(\mathbf{y},\mathbf{b}) = \prod_{i=1}^{n} F(\mathbf{x}_i\mathbf{b})^{y_i}\left[1 - F(\mathbf{x}_i\mathbf{b})\right]^{1-y_i}. \qquad (8)$$

В данной форме записи множители произведения селектируются с помощью компонент вектора $\mathbf{y}$, принимающих всего два значения: 0 или 1. В произведении сохраняются те сомножители, у которых показатель степени оказался равным 1.

Математически проще максимизировать логарифмическую функцию правдоподобия

$$\ln L = \sum_{i=1}^{n}[y_i \ln F(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) + (1-y_i)\ln(1-F(\mathbf{x}_i\mathbf{b}))]. \qquad (9)$$

Используя сокращенные записи $F_i = F(\mathbf{x}_i\mathbf{b})$ и $F_b'(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) = f_i$, выпишем для логарифмической функции правдоподобия условия максимизации первого порядка

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mathbf{b}} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{y_i f_i}{F_i} + (1-y_i)\frac{-f_i}{(1-F_i)}\right]\mathbf{x}_i' = 0. \qquad (10)$$

В случае логистической функции распределения эта система уравнений хотя и может быть упрощена, но все равно для получения ее решения приходится использовать численные методы.

Адекватность модели бинарного выбора определяется по коэффициенту Макфаддена

$$LRI = 1 - \frac{\ln L(\hat{\mathbf{b}})}{\ln L(\hat{b}_0)}, \qquad (11)$$

где $\ln L(\hat{\mathbf{b}})$ – максимальное значение логарифмической функции правдоподобия, достигаемое в точке, координаты которой равны оценкам параметров модели $\hat{\mathbf{b}} = (\hat{b}_0, \hat{b}_1, K, \hat{b}_m)$, а $\ln L(\hat{b}_0)$ – значение логарифмической функции правдоподобия, вычисленное в предположении, что $b_1 = b_2 = \Lambda = b_m = 0$.

Для этих же целей, и это важно в рассматриваемом здесь случае, можно использовать энтропийный коэффициент предсказывающих возможностей построенной модели. Этот коэффициент имеет следующий вид

$$H = \frac{1}{n}\left[-\sum_{i=1}^{n} F(\mathbf{x}_i\mathbf{b})\log_2 F(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) - \sum_{i=1}^{n}(1-F(\mathbf{x}_i\mathbf{b}))\log_2(1-F(\mathbf{x}_i\mathbf{b}))\right] \qquad (12)$$

Для случая, когда расчетные значения модели в точности совпадают с фактическими значениями дихотомической переменной, значение коэффициента (12) равно нулю, т.е. во всех случаях модель обеспечивает безошибочный выбор, не оставляя место для сомнений в пользу альтернативы. Максимальный уровень энтропии ($H = 1$) получа-

ется в случае, когда для всех рассмотренных ситуаций $\hat{y}_i = \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\hat{\mathbf{b}}) = 0{,}5$. Во всех остальных случаях $0 < \mathrm{H} < 1$. Величина коэффициента показывает средний уровень неопределенности, который будет иметь место в каждом случае бинарного выбора, если этот бинарный выбор осуществлять с помощью построенной модели.

Применение построенной логит-модели в риск-анализе факторов основано на частных производных ожидаемой функции полезности, которые с учетом того, что $\mathrm{F}(\mathbf{xb})$ логистическая функция, могут быть записаны в виде

$$\frac{\partial \mathrm{E}(y_i|\mathbf{x}_i)}{\partial x_k} = \mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b})(1-\mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}))b_k\,. \qquad (13)$$

Полученное выражение называется предельной полезностью фактора и интерпретируется как величина, на которую изменяется функция полезности при изменении фактора на единицу в ситуации, описываемой $i$-м наблюдением. Интерпретация практически не отличается от той, которой пользуются в классическом регрессионном анализе, однако механизм формирования предельной величины не так прост, как в линейной модели, и представляет собой взаимодействие двух составляющих, каждая из которых вносит свой специфический вклад в предельный эффект и требует особого рассмотрения. Более того, формула (13) представляет собой известное логистическое выражение, которое при определенных условиях порождает хаос, и, следовательно, можно предположить, что есть ситуации, в которых результат воздействия фактора на вероятность выбора не предсказуем.

Так как для случая бинарного выбора

$$\sigma^2 = \mathrm{F}(\mathbf{xb})(\mathbf{1}-\mathrm{F}(\mathbf{xb}))\,, \qquad (14)$$

то, как не трудно понять из (13), предельный эффект пропорционален квадрату риска. Таким образом, чем выше риск, тем выше степень воздействия фактора на ожидаемую полезность и, следовательно, за счет изменения фактора в данной ситуации ощутимей происходит перераспределение вероятностей между альтернативами выбора.

Из (14) легко сделать вывод, что если у фактора положительная предельная полезность, то для снижения риска в ситуации, когда $\mathrm{F}(\mathbf{xb}) > 0{,}5$ его нужно увеличивать, а в ситуации $\mathrm{F}(\mathbf{xb}) < 0{,}5$ – уменьшать. На основе результатов этого анализа можно делать выводы практического характера, помня при этом, что они имеют смысл при весьма незначительных изменениях факторов.

Если продифференцировать (14) по $k$-му фактору, то получим предельную величину воздействия фактора на риск

$$\frac{d\sigma^2}{dx_k} = \sigma^2(1-2\,\mathrm{F}(\mathbf{xb}))b_k\,, \qquad (15)$$

которая показывает, что при $b_k > 0$ и $\mathrm{F}(\mathbf{xb}) < 0{,}5$ увеличение фактора способствует росту риска, а при $b_k > 0$ и $\mathrm{F}(\mathbf{xb}) > 0{,}5$ – снижению риска, если все остальные факторы зафиксированы.

Вместе со снижением риска уменьшается и уровень энтропии

$$\mathrm{H} = -\mathrm{F}\log_2\mathrm{F} - (1-\mathrm{F})\log_2(1-\mathrm{F})\,, \qquad (16)$$

что свидетельствует о снижении неопределенности ситуации, в которой делается выбор, Энтропия, по сути, является моделью, адекватно отражающей уровень неопределенности той ситуации, в которой принимается решение.

Обычно связь между риском и неопределенностью понимается на интуитивном уровне. Здесь же эта зависимость подтверждается на формальном уровне. Максимальному уровню энтропии отвечает максимальный риск. Соответственно, минимальному уровню энтропии – минимальный риск.

Кроме того, анализ факторных возможностей снижения риска удобно проводить с помощью коэффициента абсолютного уклонения от риска, который для построенной функции полезности имеет вид

$$K_A = -\frac{\partial^2 \mathrm{E}(y_i \mid \mathbf{x}_i)/\partial x_{ik}^2}{\partial \mathrm{E}(y_i \mid \mathbf{x}_i)/\partial x_{ik}} = 2\,\mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) - 1. \qquad (17)$$

Интерпретация этого коэффициента позволяет сделать вывод, что для снижения риска за счет изменения $k$-го фактора действовать нужно избирательно. Если $\mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) < 0{,}5$, то прирост фактора только усилит ситуацию, в которой следует уклоняться от риска, а в случае $\mathrm{F}(\mathbf{x}_i\mathbf{b}) > 0{,}5$ ситуация становится противоположной.

Рассмотренный в статье подход к анализу факторов риска является эконометрическим и при наличии соответствующих выборочных совокупностей [1] вполне может использоваться при решении практических задач.

**Литература**

1. Давнис В.В. Прогнозные модели экспертных предпочтений / В.В. Давнис, В.И. Тинякова. – Воронеж: Воронеж. гос. ун-т, 2005. – 248 с.
2. Секерин А.Б. Анализ и оценка риска. Курс лекций / А.Б. Секерин, Т.М. Мамошина. – М.: ИИЦ МГУДТ, 2003. – 160 с.

## АНАЛИЗ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ЦЕНТРА ЭЛЕКТРОННОГО ОБУЧЕНИЯ СПЕЦИАЛИСТОВ В НЕФТЯНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

**А.А. Дельгашева**
Самарский государственный экономический университет, г. Самара

Одним из способов представления знаний является язык математической логики, позволяющий формально описывать понятия предметной области и связи между ними.

В отличие от естественного языка, который очень сложен, язык логики предикатов использует только такие конструкции естественного языка, которые легко формализуются.

Т.е. логика предикатов - это языковая система, которая оперирует с предложениями на естественном языке в пределах синтаксических правил этого языка.

Язык логики предикатов использует *слова*, которые описывают:

- понятия и объекты изучаемой предметной области;
- свойства этих объектов и понятий, а также их поведение и отношения между ними.

В терминах логики предикатов первый тип слов называется *термами*, а второй - *предикатами*.

***Термы*** представляют собой средства для обозначения интересующих нас индивидуумов, а ***предикаты*** выражают отношения между индивидуумами (которые обозначаются с помощью термов).

***Логическая модель*** - это множество предложений, выражающих различные логические свойства именованных отношений.

При логическом программировании пользователь описывает предметную область совокупностью предложений в виде логических формул, а ЭВМ, манипулируя этими предложениями, строит необходимый для решения задач вывод.

В качестве примера представления знаний с использованием логики предикатов, проанализируем деятельность центра электронного обучения специалистов в нефтяной промышленности с использованием логики предикатов.

SWOT – анализ представляет собой оценку внутренней среды фирмы (ее силы и слабости), а также внешних возможностей и угроз.

Это утверждение на языке логики предикатов может быть выражено следующим образом:

- Является (SWOT – анализ, оценка внутренней среды ^ оценка внешней среды)

Первый этап SWOT – анализа

На первом этапе исследования компания составляет список своих слабых и сильных сторон. Логическая модель этого предложения:

- Этап (Составление списка сильных сторон ^ слабых сторон организации (x), 1, SWOT)

Сильные стороны - это внутренние факторы, которые могут способствовать эффективной работе центра. На языке предикатов это утверждение может быть выражено следующими формулами:

- $\forall$ x (Возможность(x)) $\supset$ Положительный (x, Внешняя среда)
- $\forall$ x (Возможность(x)) $\supset$ Способствовать (Увеличение объема продаж ^ Увеличение прибыли)

К сильным сторонам центра электронного обучения относятся: наличие большой компьютерной базы: 132 компьютера, из них 107 – для учебных целей; высококвалифицированные сотрудники, постоянно занимающиеся самообразованием; адекватные финансовые ресурсы; хорошая репутация центра, доверие клиентов и поставщиков; большой опыт и налаженные методики преподавания; возможность расширения ассортимента предоставляемых услуг. Выделение сильных сторон с помощью логики предикатов проводится следующим образом:

- Является (наличие большой компьютерной базы, сильная сторона)
- Является (высококвалифицированные сотрудники, сильная сторона)
- Является (налаженные методики преподавания, сильная сторона)

Слабые стороны - это внутренние факторы, которые могут воспрепятствовать эффективной работе центра. Определение слабых сторон в виде предикатной модели:

- $\forall$ y (Слабая сторона(y)) $\supset$ Отрицательный (y, Внутренняя среда)
- $\forall$ y (Слабая сторона (y)) $\supset$ Препятствовать (эффективная работа центра))

Слабыми сторонами центра являются следующие факты: часть компьютерной техники – устаревшая; реклама производимых информационных систем и курсов недостаточная; оперативность поставок расходных материалов и комплектующих невысокая вследствие ограничений в законодательстве. Примеры слабых сторон центра можно отобразить следующим образом:

- Является (устаревшая техника, слабая сторона)
- Является (невысокая оперативность поставок, слабая сторона)
- Является (недостаточная реклама, слабая сторона)

Когда внутренние сильные и слабые стороны компании выявлены, составляется таблица «Сила-слабость» (табл. 2.2).

Таблица 2.2. «Сила -слабость»

| Внутренние сильные стороны | Внутренние слабые стороны |
|---|---|
| 1.<br>2.<br>3. | 1.<br>2.<br>3. |

- Записываются (Сильные стороны ^ Слабые стороны, таблица (сила ^ слабость)) ← Выявить (z, Сильные стороны организации (x) ^ Слабые стороны центра)

Второй этап SWOT – анализа

На втором этапе исследования компания составляет список возможностей и угроз, заключенных во внешней среде.

- Этап (Составление списка возможностей ^ угроз организации (x), 2, SWOT)

Возможности - это внешние факторы, которые благоприятствуют центру. Данное определение актуально разбить на две логические формулы:

- ∀ x (Возможность(z)) ⊃ Положительный (z, Внешняя среда)
- ∀ x (Возможность (z)) ⊃ Способствовать (эффективная работа (центр))

Возможности центра в настоящее время включают в себя способность перейти с районного на республиканский рынок информационных услуг; возможность быстрого развития в связи с резким ростом спроса на разработку корпоративных сайтов; расширение ассортимента продукции для удовлетворения потребностей клиентов. Возможности центра на языке предикатов можно отобразить следующим образом:

- Является (расширение ассортимента продукции, Возможность)
- Является (рост спроса на разработку корпоративных сайтов, Возможность)
- Является (расширение географии продаж, Возможность)

Угрозы - это внешние факторы, которые, вероятнее всего, будут причинами неблагоприятных условий для работы центра. Это определение также можно представить в виде предикатных моделей:

- ∀ y (Угроза (y)) ⊃ Отрицательный (y, Внешняя среда)
- ∀ y (Угроза (y)) ⊃ Препятствовать (эффективная работа (центр))

Угрозу для эффективной работы центра представляют растущая требовательность покупателей и поставщиков; ужесточение налогового законодательства; рост продаж информационных систем крупных производителей («1С», «Новый Диск »). Примеры угроз, формализованные с использованием логики предикатов, представлены ниже.

- Является (растущая требовательность покупателей, Угроза)
- Является (ужесточение налогового законодательства, Угроза)
- Является (рост продаж информационных систем крупных производителей, Угроза)

Когда внешние возможности и угрозы выявлены, составляется таблица «Возможности-угрозы» (табл.2.3)

Таблица 2.3. «Возможности - угрозы»

| Потенциальные внешние возможности | Потенциальные внешние угрозы |
|---|---|
| 1.<br>2.<br>3. | 1.<br>2.<br>3. |

- Записываются (Возможности ^ Угрозы, таблица (возможности ^ угрозы)) ← Выявить (z, Возможности организации (x) ^ Угрозы организации (x))

Анализ среды – это очень важный этап для выработки стратегии центра. Очевидно, что, не зная среды, центр не сможет существовать. Центр изучает среду для того, чтобы обеспечить успешное продвижение к своим целям. Следующим этапом в структуре процесса стратегического управления является определение общего направления деятельности центра – формулирование его миссии и целей развития.

Миссию можно рассматривать как стратегический инструмент, идентифицирующий целевой рынок и широко определяющий основную деятельность центра. Понятие миссии имеет два значения: широкое и узкое. Это утверждение можно представить в виде компактной логической формулы:

- Значение (миссия, широкое ∨ узкое)

В широком смысле миссия - это философия организации, которая определяет ценности, верования и принципы, в соответствии с которыми центр намеревается осуществлять свою деятельность.

- Значение (миссия, широкое) → Является (миссия, философия (ценности ^ верования ^ принципы))

Для центра электронного обучения специалистов в нефтяной промышленности миссией в широком значении будет следующая: «Мы создаем специализированные информационные продукты, повышающие эффективность работы организаций. Мы максимально сконцентрированы на удовлетворение потребностей определенного клиента. Мы разрабатываем уникальные продукты, соответствующие требованиям именно вашего предприятия. Наш лозунг – «Все пожелания клиента включены».

В узком смысле миссия - это сформулированное утверждение о том, для чего или по какой причине существует организация. Логическая формула для этого определения:

- Значение (миссия, узкое) → Является (миссия, утверждение (смысл существования ^ отличие организации(X)))

Для центра электронного обучения специалистов в нефтяной промышленности миссией в широком значении будет следующая: «Информационные системы только для вашего бизнеса».

Если миссия задает общие ориентиры, направления функционирования центра, выражающие смысл ее существования, то конкретные конечные состояния, к которым стремится центр, фиксируются в виде ее целей.

Цели – это конкретные состояния отдельных характеристик организации, достижение которых является для нее желательным и на достижение которых направлена ее деятельность. Понятие целей удобно представить в виде двух предикатных выражений.

- Является (цель, желательный результат)
- Ориентирована (деятельность (организация (X)), цель)

Цели управления классифицируют следующим образом:

- Стратегические цели - это цели, направленные на упрочение положения фирмы в долгосрочной перспективе. Для центра электронного обучения специалистов в нефтяной промышленности стратегической целью являются вложение денег в повышение квалификации сотрудников и дальнейшая разработка более сложных чем у конкурентов проектов. Другая стратегическая цель центра - к 1.10.06 закончить строительство нового офиса.
- Финансовые цели – это цели, направленные на увеличение в краткосрочной перспективе финансовых показателей. Для центра электронного обучения финансовыми целями будут:
    - К 1.10.05 расширить ассортимент предоставляемых платных услуг и установить 3% процентную доплату от получаемой прибыли к зарплате сотрудников.
    - К 1.11.05 увеличить оборот средств на 30%.

- К 1.01.06 повысить объем финансовых резервов на 20%.
- К 1.01.06 приобрести мультимедийный проектор.

Особенности стратегических и финансовых целей также можно представить, используя логику предикатов:

- Разделяются (цели, стратегические ∨ финансовые)
- Приоритет (стратегические ^ финансовые цели, наивысший)
- Показатели (финансовые, низкие) → Ставятся (цели, финансовые ^ краткосрочные)
- Показатели (финансовые, высокие) → Ставятся (цели, стратегические ^ долгосрочные)
- Траекторные цели предполагают определение общего направления развития, в них отражаются наиболее общие (системные) вопросы. Траекторная цель центра: «Стать лучшей фирмой по разработке программного обеспечения на юго-востоке Татарстана, специализирующейся на предприятиях нефте- и газодобывающего профиля.»
- Точечные цели формулируются с учетом достижения конкретного конечного результата. Точечными целями для центра электронного обучения являются:
  - выйти на уровень: 1 профессиональный сайт в месяц;
  - к 1.01.05 создать финансовый резерв 60 000 руб.;
  - приобрести мультимедийный проектор в 2006г.

Особенности траекторных и точечных целей в виде предикатных формул выглядят следующим образом:

- Разделяются (цели, траекторные ∨ точечные)
- Ориентированы (траекторные цели, общие ^ системные вопросы)
- Ориентированы (точечные цели, конкретный ^ конечный результат)
- Долгосрочные цели - это цели, срок реализации которых превышает в среднем 1 год. Долгосрочные цели центра электронного обучения:
  - к 1.10.06 закончить строительство нового офиса;
  - 2007-2008г.г. – открыть филиал центра в г.Альметьевск;
  - осень 2006 – весна 2007 – организовать выездные сессии коммерческих курсов по Татарстану по предварительной заявке.
- Краткосрочные цели - это цели, срок реализации которых не превышает в среднем 1 год. К краткосрочным целям центра электронного обучения можно отнести:
  - приобрести мультимедийный проектор в 2006г;
  - к 1.02.06 соединить все компьютерные аудитории в единую сеть;
  - К 1.10.06 предоставить студентам коммерческих курсов возможность выхода в интернет в учебных целях.

Логические цепочки долгосрочных и краткосрочных целей представлены ниже.

- Является (цель, траекторная) → Является (цель, долгосрочная)
- Является (цель, точечная) → Является (цель, краткосрочная)
- Конечная цель - это та, которой нельзя достичь за планируемый период времени, но нужно и возможно достичь в будущем за более продолжительный период. Такой целью для центра электронного обучения специалистов в нефтяной промышленности может быть «К 1.10.06 закончить строительство нового офиса».

- Промежуточные цели - это цели, последовательное достижение которых обеспечивает достижение конечной цели. Промежуточными целями для центра электронного обучения являются:
  - к 1.09.06 закончить строительство 1-го этажа;
  - к 1.02.06 закончить строительство 2-го этажа;
  - к 1.06.06 закончить строительство 3-го этажа;
  - к 1.10.06 сделать внутренний косметический ремонт и установить мебель.

Представим взаимосвязь конечной и промежуточных целей в виде предикатной модели:

- Разделяются (цели, конечные $\vee$ промежуточные)
- Содействует (цель, достижение (конечная цель)) $\rightarrow$ Является (цель, промежуточная)

Таким образом, комбинируя термы, предикаты и логические связки можно любое предложение нашего разговорного языка выразить на языке предикатов, понятному компьютеру, который на основе таких формализованных знаний может решать определенные задачи.

## ОЦЕНКА ФИНАНСОВОГО СОСТОЯНИЯ ПРЕДПРИЯТИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДЕЛЕЙ НЕЧЕТКОЙ МАТЕМАТИКИ

**Л.Н.Зубкова**
Орловский государственный университет, г. Орел

В литературе по экономическому анализу широко описывается система финансовых показателей, позволяющих как анализировать финансовое положение действующих предприятий, так и оценивать финансовый потенциал инвестиционных проектов. В системе финансовых показателей выделяют несколько их групп: коэффициенты ликвидности и оборачиваемости, показатели платежеспособности и рентабельности. В зависимости от того, для решения каких задач определяется финансовое состояние предприятия, рассчитываются показатели тех или иных групп. Так, например, для оценки кредитоспособности заемщика при страховании банковских кредитов страховые организации учитывают финансовое состояние заемщика с точки зрения его платежеспособности, для чего на основе аналитического баланса рассчитывается ряд показателей платежеспособности и ликвидности.

Рассмотрим один из подходов к комплексной оценке финансового состояния предприятия с использованием нечетко-множественных математических методов. На основе ряда показателей платежеспособности оценим финансовое состояние одного из предприятий Орловской области на предмет страхования ответственности заемщиков за непогашение кредитов.

Представим оцениваемое финансовое состояние предприятия следующей иерархической структурой (рис.1).

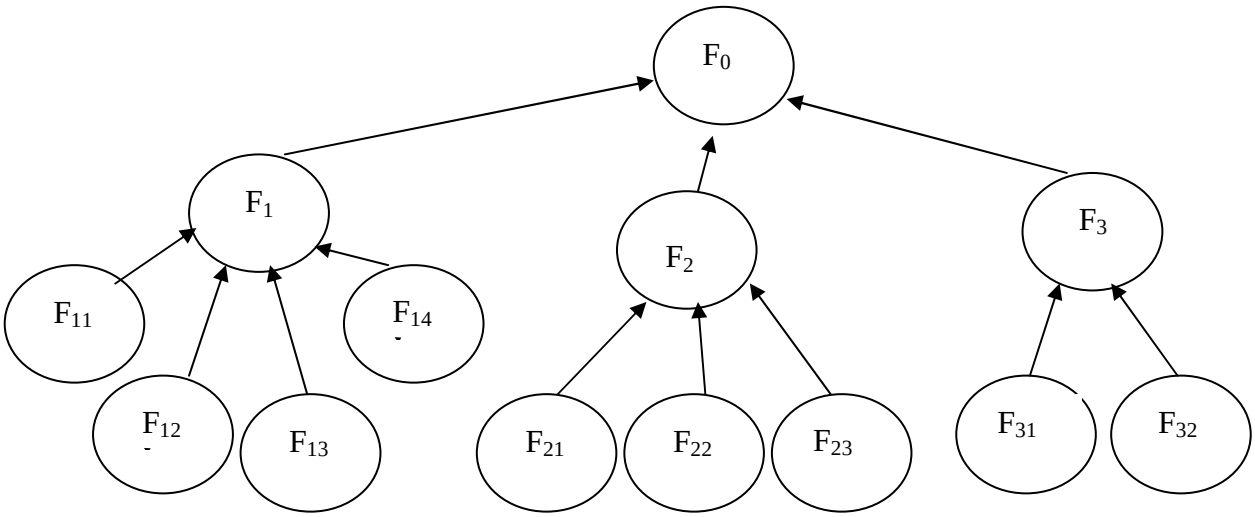



Рис. 1.

Иерархия описывается ориентированным графом с одной корневой вершиной $F_0$, характеризующей финансовое состояние предприятия. Вершины графа $F_1$, $F_2$, $F_3$ описывают соответственно уровень ликвидности, структуру капитала и уровень рентабельности, которые, в свою очередь, определяются на основе оценок факторов $F_{11}$, $F_{12}$, $F_{13}$, $F_{14}$, $F_{21}$, $F_{22}$, $F_{23}$, $F_{31}$, $F_{32}$. Опишем содержание перечисленных факторов.

$F_{11}$ – текущая ликвидность, оценивается коэффициентом текущей ликвидности (или коэффициентом покрытия краткосрочных обязательств), позволяющим установить, в какой кратности текущие активы покрывают краткосрочные обязательства. Если соотношение текущих активов и краткосрочных обязательств ниже, чем 1:1, то говорят о высоком финансовом риске, связанным с невозможностью предприятием оплатить свои счета. Если коэффициент больше 1, то предприятие располагает некоторым объемом свободных ресурсов, формируемых за счет собственных источников.

$F_{12}$ – абсолютная ликвидность, оценивается коэффициентом абсолютной ликвидности, показывающим, какую часть краткосрочной задолженности предприятие может погасить в ближайшее время за счет денежных средств. Оптимальный коэффициент – 0,25, минимально допустимый – 0,1.

$F_{13}$ – общая ликвидность, оценивается общим показателем ликвидности. Этот показатель дает наиболее общую оценку изменения финансовой ситуации компании с точки зрения ликвидности. Нормальное значение больше, либо равно 1.

$F_{14}$ – обеспеченность собственными средствами, оценивается коэффициентом обеспеченности, характеризующим наличие собственных оборотных средств у предприятия, необходимых для его финансовой устойчивости. Критериальное значение не менее 0,1.

Количественная оценка фактора $F_{21}$ характеризует соотношение между активами, обеспеченными кредиторами, и активами, обеспеченными акционерами, то есть зависимость предприятия от внешних источников средств и выражается коэффициентом $\kappa_1 = \frac{заемный\quad капитал}{собственный\quad капитал}$. Большое значение коэффициента $\kappa_1$ свидетельствует о рискованном положении предприятия.

Способность предприятия выплачивать проценты кредиторам на предоставленные займы отражает коэффициент $\kappa_2 = \frac{чистая\quad прибыль + расходы\quad по\quad выплате\quad \% + налоги}{расходы\quad по\quad выплате\quad \%}$, показывающий, сколько

раз в течение года предприятие заработало средства для выплаты процентов (фактор $F_{22}$ отражает степень защищенности кредиторов).

Соотношение интересов собственников предприятия и владельцев акций и кредиторов (фактор $F_{23}$) характеризуется коэффициентом собственности $\kappa_3 = \frac{собственный\ \ капитал}{итог\ \ баланса} \cdot 100\%$. Оптимальной считается невысокая доля заемного капитала и значительный уровень собственных средств. Инвесторы и кредиторы отдают предпочтение предприятиям с высоким уровнем показателя $\kappa_3$ – не менее 50% .

$F_{31}$ – рентабельность активов (отношение валовой прибыли и выплаченных процентов по займам к средней за период стоимости активов).

$F_{32}$ – рентабельность собственного капитала (отношение чистой прибыли к средней за период стоимости собственного капитала).

Последние показатели рентабельности применяются для текущей оценки прибыльности предприятия.

Рассмотрим метод оценки состояния , основанный на качественных шкалах, нечетких описаниях и установлении отношений предпочтения между факторами в структуре их иерархий.

Пусть T– набор качественных оценок уровней каждого фактора в иерархии. T={$T_1$= очень низкий уровень фактора, $T_2$=низкий уровень фактора, $T_3$=средний уровень фактора, $T_4$=высокий уровень фактора, $T_5$=очень высокий уровень фактора}. Определим пять функций принадлежности $\mu_{T1}(x)$, $\mu_{T2}(x)$, $\mu_{T3}(x)$, $\mu_{T4}(x)$, $\mu_{T5}(x)$, отвечающих соответственно нечетким подмножествам $T_1$, $T_2$, $T_3$, $T_4$, $T_5$. Функция принадлежности $\mu_T(x)$ – это функция, областью определения которой является носитель U (универсальное множество, к которому относятся все результаты наблюдений), а областью значений - отрезок [0;1]; она количественно оценивает степень принадлежности элемента x носителя U нечеткому множеству T. В качестве семейства функций принадлежности может выступать стандартный пятиуровневый 01-классификатор, где функции принадлежности – трапециевидные нечеткие числа (рис.2).

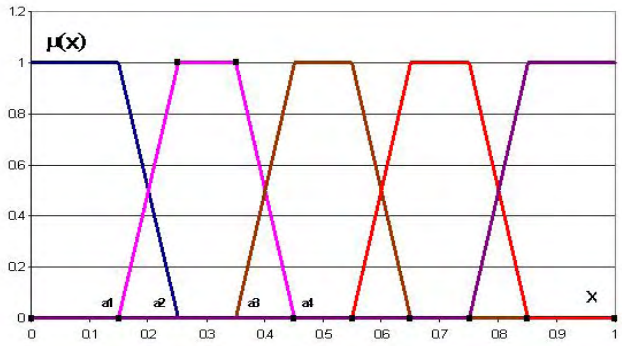



Рис. 2.

На иерархию накладывается система Ф отношений предпочтений. $\Phi=\{F_i \varphi F_j; \varphi \in \{\text{f}, \approx\}\}$, где « f » - отношение предпочтения, «≈» - отношение безразличия. Для нашей задачи она имеет вид: $\Phi=\{F_1 \text{ f } F_2 \approx F_3, F_{11} \text{ f } F_{12} \text{ f } F_{13} \approx F_{14}, F_{21} \text{ f } F_{22} \text{ f } F_{23}, F_{31} \approx F_{32}\}$.

Каждая оценка количественно описывается функцией принадлежности $\mu_T(x)$, имеющей график в форме трапеции, или нечетким трапециевидным числом ($a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$), где $a_i$ соответствуют абсциссам вершин трапеции. В соответствии с рисунком 1 составляем систему оценок факторов нечеткими числами. Результаты представлены в таблице.

| Фактор | Наименование фактора | Количественная оценка | Качественная оценка уровня фактора | Оценка фактора нечетким числом |
|---|---|---|---|---|
| $F_{11}$ | Текущая ликвидность | Коэф-т текущей ликвидности 1,3 | средний | (0.35; 0.45; 0.55; 0.65) |
| $F_{12}$ | Абсолютная ликвидность | Коэф-т абсолютной ликвидности 0,4 | средний | (0.35; 0.45; 0.55; 0.65) |
| $F_{13}$ | Общая ликвидность | Общий показатель ликвидности 1,5 | высокий | (0.55; 0.65; 0.75; 0.85) |
| $F_{14}$ | Обеспеченность собственными средствами | Коэф-т обеспеченности собственными средствами 1,6 | высокий | (0.55; 0.65; 0.75; 0.85) |
| $F_{21}$ | Соотношение заемного и собственного капитала | Коэф-т финансовой устойчивости $K_1$= 0,12 | высокий | (0.55; 0.65; 0.75; 0.85) |
| $F_{22}$ | Выплата % по займам (защищенность кредиторов) | $K_2$=38,5 | средний | (0.35; 0.45; 0.55; 0.65) |
| $F_{23}$ | Соотношение интересов собственников и кредиторов | Коэф-т собственности $K_3$=60% | высокий | (0.55; 0.65; 0.75; 0.85) |
| $F_{31}$ | Рентабельность активов | Коэф-т рентабельности активов 0,24 | низкий | (0.15; 0.25; 0.35; 0.45) |
| $F_{32}$ | Рентабельность собственного капитала | Коэф-т рентабельности собственного капитала 0,22 | средний | (0.35; 0.45; 0.55; 0.65) |

Далее на основе системы предпочтений Ф необходимо определить систему весов $p_i$ для каждого фактора в одной группе. Для этого составим матрицы попарных сравнений приоритетности факторов в каждой группе и вычислим векторы приоритетов, их компоненты примем за весовые коэффициенты $p_i$. Матрицы попарных сравнений и векторы приоритетов для рассматриваемой задачи следующие:

Для факторов группы $F_1$

| | $F_{11}$ | $F_{12}$ | $F_{12}$ | $F_{14}$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_{11}$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
| $F_{12}$ | 1/2 | 1 | 2 | 3 |
| $F_{12}$ | 1/3 | 1/2 | 1 | 1 |
| $F_{14}$ | 1/4 | 1/3 | 1 | 1 |

Для факторов группы $F_2$

| | $F_{21}$ | $F_{22}$ | $F_{23}$ |
|---|---|---|---|
| $F_{21}$ | 1 | 2 | 3 |
| $F_{22}$ | 1/2 | 1 | 2 |
| $F_{23}$ | 1/3 | 1/2 | 1 |

Для факторов группы $F_3$

| | $F_{31}$ | $F_{32}$ |
|---|---|---|
| $F_{31}$ | 1 | 1 |
| $F_{32}$ | 1 | 1 |

Для факторов группы $F_0$

| | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ |
|---|---|---|---|
| $F_1$ | 1 | 5 | 7 |
| $F_2$ | 1/5 | 1 | 1 |
| $F_3$ | 1/7 | 1 | 1 |

В рассматриваемой задаче система весов имеет вид:

| Ф | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $P_4$ |
|---|---|---|---|---|
| $F_{11}$ f $F_{12}$ f $F_{13} \approx F_{14}$ | 0,46 | 0,28 | 0,14 | 0,12 |
| $F_{21}$ f $F_{22}$ f $F_{23}$ | 0,54 | 0,30 | 0,16 | - |
| $F_{31} \approx F_{32}$ | 0,5 | 0,5 | - | - |
| $F_1$ f $F_2 \approx F_3$ | 0,74 | 0,14 | 0,12 | - |

Зная оценки факторов одного подуровня и систему соответствующих весов факторов, получим оценки факторов другого уровня, используя оператор Ягера: $\mu(x) = \sum_{i=1}^{N} \mu_{Ti}(x) \cdot p_i$.

Учитывая способ описания с помощью нечетких трапециевидных чисел, операции с которыми проводят по правилам мягких вычислений на основе сегментного принципа, последнее соотношение примет вид:

$$\sum_{i=1}^{N} p_i \times (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, a_{i4}) = (\sum_{i=1}^{N} p_i \times a_{i1}, \sum_{i=1}^{N} p_i \times a_{i2}, \sum_{i=1}^{N} p_i \times a_{i3}, \sum_{i=1}^{N} p_i \times a_{i4}).$$

Приведем расчеты оценки факторов $F_1$, $F_2$, $F_0$ в следующей таблице.

| Фактор | Оценка фактора нечетким числом | | | | Качественная оценка |
|---|---|---|---|---|---|
| | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | |
| $F_{11}$ | 0.35 | 0.45 | 0.55 | 0.65 | средний |
| $F_{12}$ | 0.35 | 0.45 | 0.55 | 0.65 | средний |
| $F_{13}$ | 0.55 | 0.65 | 0.75 | 0.85 | высокий |
| $F_{14}$ | 0.55 | 0.65 | 0.75 | 0.85 | высокий |
| $F_1$ | 0.40 | 0.50 | 0.60 | 0.70 | ближе к среднему |
| $F_{21}$ | 0.55 | 0.65 | 0.75 | 0.85 | высокий |
| $F_{22}$ | 0.35 | 0.45 | 0.55 | 0.65 | средний |
| $F_{23}$ | 0.55 | 0.65 | 0.75 | 0.85 | высокий |
| $F_2$ | 0.49 | 0.59 | 0.69 | 0.79 | ближе к высокому |
| $F_{31}$ | 0,15 | 0,25 | 0,35 | 0,45 | низкий |
| $F_{32}$ | 0.35 | 0.45 | 0.55 | 0.65 | средний |
| $F_3$ | 0.25 | 0.35 | 0.45 | 0.55 | между низким и средним |
| $F_0$ | 0.39 | 0.49 | 0.59 | 0.69 | ближе к среднему |

Прокомментируем таблицу. Используя классификатор на рисунке 2, количественной оценке фактора $F_1$ нечетким трапециевидным числом (0.4; 0.5; 0.6; 0.7) соответствует качественная лингвистическая оценка, которая распознает уровень фактора $F_1$ между средним и высоким. Для позиционирования полученного уровня фактора к одной из качественных оценок зададим меру сходства $\nu$ двух нечетких трапециевидных чисел ($a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$) и ($b_1$, $b_2$, $b_3$, $b_4$) нормой Хемминга: $0 \le \nu = 1 - \max\{|a_1-b_1|, |a_2-b_2|, |a_3-b_3|, |a_4-b_4|\} \le 1$. Расчет меры сходства уровня фактора $F_1$ с высоким и средним уровнем позиционирует его ближе к среднему ($\nu_{ср}$=0.95; $\nu_{в}$=0.85). Уровень фактора $F_2$ оценивается количественно нечетким трапециевидным числом (0.49; 0.59; 0.69; 0.79) и позиционируется ближе к высокому ($\nu_{ср}$=0.86; $\nu_{в}$=0.94). Уровень фактора $F_3$ оценивается количественно нечетким трапециевидным числом (0.25; 0.35; 0.45; 0.55) и позиционируется между низким и средним с одинаковыми мерами сходства ($\nu_{н}$=0.9; $\nu_{ср}$=0.9). Аналогично уровень фактора $F_0$ распознается как средний ($\nu_{ср}$=0.96; $\nu_{в}$=0.84). Таким образом, финансовое состояние предприятия можно качественно оценить как среднее (стабильное), а само предприятие считать платежеспособным и выгодным для страхования его кредитов.

Описанная выше методика позволяет агрегировать показатели каждого уровня иерархии и распознавать агрегированный фактор по шкале Т. Пройдя последовательно по всем уровням иерархии можно получить качественную интерпретацию уровня фактора $F_0$, характеризующего состояние системы в целом.

**Литература**
1. Баринов В.А. Бизнес – планирование. – М.:ФОРУМ:ИНФРА-М, 2004
2. Заде Л. Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенных решений. – М.: Мир, 1976
3. Недосекин А.О.Оценка риска бизнеса на основе нечетких данных. – http://www.vmgroup.sp.ru/
4. Саати Т.Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993

## ЭКСПЕРТНЫЙ МЕТОД ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПОТОКА ПЛАТЕЖЕЙ В ХОДЕ РИСК-АНАЛИЗА ИНВЕСТИЦИОННОГО ПРОЕКТА

**А.М. Краснов**
Государственная академия специалистов
инвестиционной сферы, г. Москва

*Необходимость проведения достаточно сложного и детального анализа риска в ходе разработки инвестиционного проекта является одним из требований, представленных в «Методических рекомендациях по оценке эффективности инвестиционных проектов» [5].*

К настоящему времени сложился достаточно широкий спектр практических инструментов, используемых при исследовании проектных рисков и применяемых как в ходе качественного анализа, так и количественного [2] - SWOT-анализ, роза рисков, метод аналогий или консервативные прогнозы, метод расчета нормы дисконта с поправкой на риск, метод критических значений, деревья решений, сценарный подход, анализ чувствительности статистический подход. Как отмечается многими исследователями [1] , наиболее эффективными (и, соответственно, более сложными) методами являются сценарный подход, а также анализ чувствительности.

Одним из наиболее часто применяемых количественных критериев эффективности проекта является чистый дисконтированный доход NPV (Net Present Value) [2, с. 90]. Для анализа эффективности проекта по данному критерию необходимы, в первую очередь, прогнозные оценки притоков b(t) и оттоков c(t) в каждый период времени t срока жизни проекта. Особенную трудность получение таких прогнозных оценок вызывает в том случае, когда рассматриваемый проект связан с реальными инвестициями. Именно о такой ситуации идет речь в ходе анализа инвестиционных проектов, выполняемых промышленными предприятиями.

В настоящее время существует ряд достаточно проработанных методов прогнозирования на базе теории временных рядов, технологии нейронных сетей, а также методов регрессионного анализа. Проблема заключается в том, что указанные методы основаны на использовании достаточно обширных массивов статистических данных наблюдений, предшествующих моменту анализа. Вместе с тем, одним из отличительных признаков инвестиционного проекта является его уникальность (неповторимость) [2, с. 65]. Поэтому никакие статистические данные, имеющиеся в распоряжении аналитика на прединвестиционной фазе, не могут содержать в себе информации, достаточной для составления прогнозных оценок величин b(t) и c(t) на такой длительный период, как срок жизни проекта.

В силу указанных причин, в ходе прогнозирования доходов и затрат для проектов, связанных с реальными инвестициями, чаще всего используются экспертные оценки. Здесь, в свою очередь, на первый план выступает проблема достоверности таких оценок. В связи с этим, актуальной является задача разработки методов экспертного прогнозиро-

вания потока платежей инвестиционного проекта. Основные требования, которым должны удовлетворять данные методы, заключаются в том, что, с одной стороны, оценки должны основываться на информации, полученной в ходе экспертного опроса, а, с другой стороны, достоверность получаемых оценок должна быть в достаточной мере обоснована на базе тех или иных экономико-математических методов.

В данной работе предлагается новый метод экспертных прогнозных оценок потока платежей инвестиционного проекта. Он основан на использовании метода анализа иерархических систем Т.Саати [6] в сочетании с предлагаемой автором процедурой оценки интенсивности проявления факторов риска и тяжести потерь.

В ходе оценки потока платежей инвестиционного проекта необходимо, в первую очередь, дать умеренно-оптимистический прогноз потока платежей. Под умеренно-оптимистическим прогнозом мы понимаем оценку будущих притоков и оттоков по проекту без учета негативного проявления факторов риска. При этом также не учитывается возможность и позитивного проявления факторов риска. Например, при умеренно-оптимистической оценке объема реализации продукции, произведенной в ходе выполнения проекта, не учитывается возможность выпуска меньшего количества продукции или снижение соответствующего уровня спроса по отношению к планируемому уровню. С другой стороны, здесь не учитывается и возможность роста спроса, что может привести к большему притоку платежей, чем это планировалось на стадии подготовки проекта.

После того, как выполнены умеренно-оптимистические оценки потока платежей, необходимо выявить состав факторов риска, оказывающих наиболее значимое влияние на изменения потока платежей. В целом необходимо рассматривать две группы факторов - факторы риска, проявление которых приводит к снижению притоков и факторы, проявление которых приводит к росту оттоков, т.е. затрат. При этом не исключается, что один и тот же фактор риска может входить одновременно в обе группы, тем не менее, мы считаем целесообразным разделение этих групп.

Модель количественной оценки проявления факторов риска мы рассмотрим на примере оценки размера снижения денежных поступлений по проекту в результате этого проявления. Аналогично можно оценивать влияние факторов риска на рост затрат по проекту.

Будем считать, что нами выделены основные факторы риска $F_1$, $F_2$, …, $F_m$ проявление которых оказывает значимое влияние на снижение денежных поступлений по проекту. В соответствии с общей теорией принятия решений в условиях риска и неопределенности [7], для экспертной количественной оценки проявления факторов $F_1$, $F_2$, …, $F_m$ необходимо сначала вербально описать основные последствия $C_1$, $C_2$, …, $C_k$ их проявления. Далее, мы предполагаем, что влияние этих факторов на тяжесть каждого из последствий может быть количественно оценено. Тяжесть последствия мы будем измерять как долю относительных потерь, являющихся результатом этого последствия. Пусть для каждого j=1,2,…,k число $\Delta_j$ равно экспертной оценке относительных потерь в результате наступления последствия с номером j при том условии, что факторы риска, формирующие это последствие, имеют максимальную интенсивность. Приведем соответствующий пример. Предположим, что рассматриваемое последствие состоит в снижении выручки от реализации продукции в результате снижения платежеспособного потребительского спроса. Факторами риска, формирующими снижение платежеспособного потребительского спроса на продукцию, являются – снижение уровня платежеспособности потребителей; постепенный переход потребителей на замещающую продукцию других производителей; снижение общего количества потребителей продукции данного типа. В результате экспертного опроса может быть установлено, что при максимальной интенсивности проявления перечисленных факторов объем реализации продукции снизится на 20%, т.е. $\Delta$=20%.

Далее, для каждого из рассматриваемых последствий определяются веса, отражающие степень влияния каждого из отдельных последствий на общий уровень потерь. Аналогично для каждого из выделенных факторов риска $F_i$ оцениваются веса-приоритеты $W_{ij}$, где вес $W_{ij}$ отражает степень влияния проявления фактора $F_i$ на тяжесть последствия $C_j$. Кроме того, должны выполняться соотношения

$$\sum_{i=1}^{m} w_{ij} = 1, \quad j = 1,2,..., k.$$

Веса-приоритеты факторов риска (а также веса, отражающие степень значимости каждого из отдельных последствий) предлагается оценивать на базе основной процедуры метода анализа иерархических систем [6]. Данный метод позволяет провести экспертную оценку степеней влияния факторов не путем прямого указания значений этих весов, а на основе попарного сравнения степени влияния одного фактора по сравнению с другими. Кроме того, метод анализа иерархий позволяет в ходе расчета весов с использованием мнений нескольких экспертов оценить уровень согласованности экспертных оценок. Наконец, метод анализа иерархий программно реализован в виде системы поддержки принятия решений Expert Decide 2.2 [3].

Согласно нашей модели, тяжесть последствий и, соответственно уровень потерь, зависят от интенсивности проявления факторов риска. Для измерения этой интенсивности предлагается использовать вербально-числовую шкалу Харрингтона [4].

Общий уровень относительных потерь оценивается по формуле

$$\Delta = W_1\Delta(C_1)+ W_2\Delta(C_2)+\ldots+W_k\Delta(C_k). \qquad (1)$$

Здесь $W_1,W_2,\ldots W_k$ – степени влияния последствий $C_1$, $C_2$, …, $C_k$ на общий уровень относительных потерь, а $\Delta(C_1)$, $\Delta(C_2),\ldots,\Delta(C_k)$ – тяжести последствий, зависящие в свою очередь от интенсивности проявления соответствующих факторов риска.

Величины $\Delta(C_1)$, $\Delta(C_2),\ldots,\Delta(C_k)$ оцениваются по формулам

$$\Delta(C_j)= \Delta_j(0.9)^{-1}[W_{1j}I(F_1)+ W_{2j}I(F_2)+\ldots+ W_{mj}I(F_m)]. \qquad (2)$$

В этой формуле $\Delta_j$ – максимально возможная тяжесть последствия $C_j$, $I(F_i)$ – оценка интенсивности проявления фактора риска $F_i$ , множитель $(0.9)^{-1}$ в формуле (2) означает, что оценка интенсивности проявления фактора риска делится на значение максимальной интенсивности. Таким образом, поскольку сумма чисел $W_{1j},W_{2j},\ldots W_{mj}$ равна 1, то при максимальной интенсивности проявления факторов риска величина $\Delta(C_j)$ равна $\Delta_j$, что соответствует исходной интерпретации величин $\Delta_j$.

Данная схема проходила апробацию на промышленном предприятии, основным видом деятельности которого является производство линий разлива безалкогольных напитков. Предприятие намерено осуществить инвестиционный проект по организации нового участка производства скоростных стационарных фильтров для очистки питьевой воды. Основными потребителями данной продукции будут крупные предприятия розничной торговли, устанавливающие такие фильтры в торговых залах, предприятия сферы общественного питания, а также предприятия сферы малого бизнеса, осуществляющие доставку питьевой воды в офисы и жилые дома.

Основными последствиями, в результате которых может снизиться объем денежных поступлений, являются снижение объема производства по отношению к планируемому уровню, снижение уровня спроса на продукцию, а также снижение рыночного уровня цен на указанную продукцию. В качестве экспертов привлекались главный конструктор предприятия, главный инженер, а также зам. директора по маркетингу и сбыту. В результате проведенного экспертного анализа и применения программного пакета Expert Decide 2.2 были получены оценки весов, представленные на рис. 1.

Рис. 1. Степени влияния отдельных последствий на общий уровень снижения выручки от реализации продукции.

Таким образом, наибольшим приоритетом (0.567) и, соответственно, наибольшими опасениями, характеризуется снижение уровня спроса на продукцию. Меньший вес (0.323) эксперты придали возможности снижения объемов производства. Наконец минимальным весом (0.110) характеризуется возможность снижения рыночного уровня цен. Тем не менее, такая возможность учитывается в связи с достаточно интенсивным развитием технологии производства и ростом конкуренции в рассматриваемом сегменте рынка. Далее, эксперты считают, что максимальное снижение объема выручки вследствие снижения спроса может составить 15%, вследствие снижения объема производства – 11%, и вследствие снижения уровня цен – 6%.

Возможность снижения объема производства обусловлена технологическими факторами риска, производственными факторами, а также организационно-управленческими факторами. Основными технологическими факторами риска являются новизна для предприятия данной технологии производства, возможная необходимость внесения конструктивных изменений в базовые чертежи в ходе производства продукции, а также возможная переоценка технологических возможностей предприятия по объемам производства данной продукции. Производственные факторы риска учитывают возможность поломок оборудования и брака, вызванного ошибками персонала. Организационно-управленческие факторы учитывают возможности снижения объемов производства вследствие слабой отлаженности поставок исходных материалов, неэффективной организации управления новым производственным участком, низкой мотивации персонала вследствие низкой оплаты труда и др.

Для указанных факторов, согласно проведенному экспертному анализу, были получены следующие оценки весов и интенсивностей: Технологические факторы – вес 0.416, высокая интенсивность (0.72); производственные факторы – вес 0.458, средняя интенсивность (0.5); организационно-управленческие факторы – вес 0.126, средняя интенсивность (0.5). Применяя эти оценки, по формуле (2) получаем

$\Delta(C_1)= 15\%\times(0.9)^{-1}\times(0.416\times0.72+ 0.458\times0.5+0.126\times0.5)\approx9.86\%$.

Аналогично были оценены величины $\Delta(C_2)$ и $\Delta(C_2)$ потерь, вызываемых такими последствиями как снижение уровня спроса и снижение рыночного уровня цен на рассматриваемую продукцию. Эти величины составили соответственно 7.3% и 3.2%. Следует указать, что среди факторов риска, вызывающих данные последствия, имеется несколько общих факторов, например, таких как повышение качества бытовых фильтров, реализуемых населению, и рост конкуренции в сфере производства фильтров.

Таким образом, оценка общего уровня снижения выручки от реализации продукции составила, в соответствии с формулой (1), 7.68%, т.е. $0.323\times9.86\%+0.567\%\times7.3+0.110\times3.2\%\approx7.68\%$. Это означает, что оценка реального объема выручки от реализации продукции с учетом факторов риска составляет 92.32% от умеренно-оптимистической прогнозной оценки этого объема. Именно эту оценку необходимо использовать в ходе анализа эффективности инвестиционного проекта на основе критерия NPV.

В заключение отметим, что предложенный в работе метод позволяет учитывать динамику факторов риска в ходе выполнения проекта. Веса-приоритеты последствий и факторов риска, по-видимому, являются достаточно статичными величинами, тогда как интенсивности проявления факторов риска, очевидно, будут меняться в зависимости от периода выполнения проекта. Например, интенсивность проявления таких факторов как «возможность брака вследствие ошибок персонала», «слабая отлаженность поставок исходных материалов» будет снижаться по мере накопления опыта предприятия по производству данной продукции. Представленная модель позволяет учесть это обстоятельство, поскольку для каждого периода выполнения проекта оценки уровня потерь должны выполняться отдельно.

**Литература**

1. Виленский П.Л., Лившиц В.Н., Смоляк С.А. Оценка эффективности инвестиционных проектов. Теория и практика.– 2-е изд. - М.: Дело, 2002. – 888 с.
2. Волков И.М., Грачева М.В. Проектный анализ: Продвинутый курс: Учеб. Пособие. – М.: ИНФРА-М, 2004. - 495 с.
3. Кузнецов А.И. Expert Decide для Windows 95, Windows 98 и Windows NT. Версия 2.0. Руководство пользователя / Под редакцией В.Г. Шуметова. Орел: ОРАГС, 2000. - 24 с.
4. Литвак Б.Г. Экспертная информация: методы получения и анализа. - М.: Радио и связь, 1981.
5. Методические рекомендации по оценке эффективности инвестиционных проектов: (Вторая редакция). М.: Экономика, 2000. – 421 с.
6. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.
7. Arrow K.J. Essays in the Theory of Risk Bearing. Amsterdam: North Holland, 1970.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕСНОТЫ СВЯЗИ МЕЖДУ РАНЖИРОВАННЫМИ ПРИЗНАКАМИ-КОМПОНЕНТАМИ СОЦИАЛЬНО-ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОНКУРЕНТОСПОСОБНОСТИ СПЕЦИАЛИСТОВ

**А.В. Морозова**
Орловский государственный технический университет, г. Орел

*В настоящей работе рассматривается вопрос об оценке тесноты связи между ранжированными признаками-компонентами, являющимися структурными составляющими социально-профессиональной конкурентоспособности специалистов на рынке труда. Данный подход основан на формировании системы многомерных векторов приоритетов для каждого из компонентов социально-профессиональной конкурентоспособности специалиста и последующем вычислении коэффициента конкордации, которые определяются с применением прикладных программ экспертно-аналитической диагностики и статистического анализа данных.*

Моделирование давно уже стало неотъемлемым элементом экономического образа мышления. Экономисты рассматривают модели как упрощенные теории, позволяющие изучить взаимосвязи между различными экономическими индикаторами [3]. Следуя общепринятой методологии социологического исследования, в программе теоретико-прикладного социологического исследования должен обязательно содержаться этап «проявления образа предмета», т.е. моделирования [7]. Учитывая разрастающийся кризис в современной социологической теории, именно модельный подход способен сцементировать теоретические и прикладные социологические исследования. Вместо фрагментарного анализа отдельных переменных рассмотрение их взаимосвязи, т.е. модели,

обеспечит целостность подхода, так как модель, безусловно, обладает определенной степенью целостности и в этом смысле является системой [4]. При этом гибкость и многофакторность социальных объектов, систем и процессов определяет специфику выбора типа моделей, отдавая предпочтение комплексному использованию для описания социальных объектов и процессов именно «мягким» экспертно-аналитическим и стохастическим моделям.

Рассмотрим применение такого подхода к анализу степени взаимосвязи между признаками на примере исследования социально-профессиональной конкурентоспособности выпускников системы профессионального образования (вуза или ссуза).

Анализ научной литературы позволяет конкретизировать термин «конкурентоспособность» применительно к такому социальному объекту как специалист. По нашему мнению, «конкурентоспособность специалиста как субъекта рыночных отношений представляет собой совокупность свойств индивида, являющегося носителем определенных квалификационных, социальных и психологических характеристик, выступающая на рынке труда в качестве товара, наравне с присутствующими там свойствами других индивидов, имеющих аналогичные социально-профессиональные характеристики» [1]. Таким образом, конкурентоспособность специалиста как социальную категорию целесообразно рассматривать как систему преимуществ одного специалиста по отношению к другим специалистам, носителям аналогичной совокупности характеристик. Она не является имманентным качеством специалиста и может быть оценена только в рамках группы специалистов, носителей аналогичных базовых характеристик. Кроме того, она может быть выявлена только сравнением между собой квалификационных и социально-профессиональных характеристик специалистов этой группы.

В этой связи особое значение приобретает вопрос о структуре конкурентоспособности специалиста на рынке труда. Анализ результатов научных исследований в области педагогики, экономики, социологии и психологии, посвященных проблемам трудоустройства и востребованности выпускников образовательных учреждений системы профессионального образования на рынке труда, позволяет сделать вывод о том, что основными компонентами социально-профессиональной конкурентоспособности специалиста являются его квалификационные и социально-психологические характеристики. Система квалификационных характеристик включает специальные, общепрофессиональные и общенаучные знания; система социально-психологических характеристик - коммуникативную культуру, информационную культуру, личную тектологию, модус жизни и тип психологического регулирования профессиональной деятельности специалиста.

При работе экспертов с исследуемой группой в отношении каждого признака-компонента можно построить многомерный вектор приоритетов выраженности (или сформированности) данного компонента у каждого из членов исследуемой группы. Координаты полученного вектора приоритетов, принимающие натуральные значения, могут рассматриваться как ранги каждого из выпускников в отношении анализируемого признака. И в этой связи приобретает особое значение вопрос об определении тесноты связи между ранжированными признаками, являющимися компонентами социально-профессиональной конкурентоспособности молодого специалиста. По нашему мнению, такой анализ можно провести с применением множественного коэффициента ранговой корреляции (коэффициента конкордации).

При проведении такого исследования можно выделить несколько этапов.

1. В рамках исследуемой группы проводится экспертная оценка каждого из признаков $X_1; X_2; X_3; X_4$, являющихся компонентами социально-профессиональной конкурентоспособности специалиста, которые в дальнейшем выступают в роли рангов $r_1; r_2; r_3; r_4$. Причем, при проведении экспертной оценки (в настоящей работе используются данные, не являющиеся фактическими), по нашему мнению, целесообразно применение экспертной компьютерной системы

поддержки принятия решений Expert Decide. На основе полученных экспертных оценок-рангов с использованием прикладной программы SPSS (Statistical Package for the Social Science) формируется соответствующая база данных. На ее основе выполняется расчет построчной суммы рангов, общей суммы рангов $P$, суммы квадратов построчной суммы рангов, общей суммы квадратов рангов $L$ и значения отклонения $S$ суммы квадратов рангов от средней квадратов рангов:

Таблица 1
Расчет коэффициента конкордации

| | r1 | r2 | r3 | r4 | ss | ks |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 14 | 6 | 10 | 37 | 1369 |
| 2 | 2 | 8 | 3 | 1 | 14 | 196 |
| 3 | 12 | 3 | 10 | 4 | 29 | 841 |
| 4 | 13 | 10 | 8 | 14 | 45 | 2025 |
| 5 | 4 | 6 | 7 | 3 | 20 | 400 |
| 6 | 5 | 14 | 3 | 7 | 29 | 841 |
| 7 | 11 | 12 | 9 | 10 | 42 | 1764 |
| 8 | 15 | 10 | 13 | 8 | 46 | 2116 |
| 9 | 2 | 9 | 3 | 4 | 18 | 324 |
| 10 | 16 | 8 | 8 | 10 | 42 | 1764 |
| 11 | 15 | 10 | 10 | 15 | 50 | 2500 |
| 12 | 14 | 8 | 7 | 11 | 40 | 1600 |
| 13 | 3 | 7 | 4 | 3 | 17 | 289 |
| 14 | 10 | 3 | 5 | 8 | 26 | 676 |
| 15 | 9 | 11 | 14 | 14 | 48 | 2304 |
| 16 | 4 | 3 | 8 | 9 | 24 | 576 |
| 17 | 9 | 5 | 3 | 7 | 24 | 576 |
| 18 | 6 | 2 | 12 | 5 | 25 | 625 |
| 19 | 8 | 4 | 6 | 13 | 31 | 961 |
| 20 | 7 | 13 | 9 | 10 | 39 | 1521 |

где:

$n$ - порядковый номер специалиста;

$r_1$ - ранг признака «Профессиональные знания, умения и навыки (ЗУН) специалиста»;

$r_2$ - ранг признака «Коммуникативная культура специалиста»;

$r_3$ - ранг признака «Информационная культура специалиста»;

$r_4$ - ранг признака «Личная тектология специалиста»;

$ss$ - построчная сумма рангов признаков;

$ks$ - квадрат построчной суммы рангов признаков.

В рассматриваемом случае рассчитывается общая сумма рангов $P = 649$, общая сумма квадратов рангов $L = 23268$ и значение отклонения суммы квадратов рангов от средней квадратов рангов $S = 2402$.

2. Проведение частотного анализа ранжированных признаков выполняют на основании частотных таблиц, выполняемых с применением SPSS:

Таблица 2. Частотный анализ ранжированных признаков

| Значения рангов | $r_1$ | $r_2$ | $r_3$ | $r_4$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 2 | 2 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 3 | 4 | 2 |
| 4 | 2 | 1 | 1 | 2 |
| 5 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 1 | 2 | 0 |
| 7 | 2 | 1 | 2 | 2 |
| 8 | 1 | 3 | 3 | 2 |
| 9 | 2 | 1 | 2 | 1 |
| 10 | 1 | 2 | 2 | 4 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 12 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 13 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 14 | 1 | 2 | 1 | 2 |
| 15 | 2 | 0 | 0 | 1 |
| 16 | 1 | 0 | 0 | 0 |

Так как результаты (по материалу рассматриваемого примера) проведенного частотного анализа указывают на наличие связных рангов, то это позволяет вычислить $T_j = \frac{1}{12} \cdot \sum_{j=1}^{m} \left( t_j{}^3 - t_j \right)$, где $t_j$ - количество связных рангов по отдельным показателям, а также значения $S = L - \frac{P^2}{n}$.

В рассматриваемом примере:

$T_1 = 2{,}5$; $T_2 = 6{,}5$; $T_3 = 9$; $T_4 = 7{,}5$; $\sum_{J=1}^{m} T_j = 25{,}5$.

3. Расчет коэффициента конкордации ($W$) выполняется по формуле:

- $W = \frac{12 \cdot S}{m^2 \cdot \left( n^3 - n \right)}$ (при отсутствии связных рангов);
- $W = \frac{S}{\frac{1}{12} \cdot m^2 \cdot \left( n^3 - n \right) - m \cdot \sum_{j=1}^{m} T_j}$ (при наличии связных рангов);

где $m$ - количество признаков;

$n$ - число наблюдений;

$S$ - отклонение суммы квадратов рангов от средней квадратов рангов.

В рассматриваемом примере: $W = 0{,}237$.

4. Проверка значимости коэффициента конкордации осуществляется на основе $\chi^2$ - критерия Пирсона:

- в случае отсутствия связных рангов - $\chi_{\text{р}}{}^2 = \frac{12 \cdot S}{m \cdot n \cdot \left( n - 1 \right)}$;
- в случае наличия связных рангов - $\chi^2{}_{\text{р}} = \frac{S}{\frac{1}{12} \cdot m \cdot n \cdot \left( n - 1 \right) - \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{j=1}^{m} T_j}$.

В рассматриваемом примере расчетное значение $\chi_{\text{р}}^{\,2} = 19,2$ меньше $\chi_{\text{кр}}^{2} = 30,1$ ($\alpha = 0,01; P = 0,99; \nu = n - 1 = 19$), что подтверждает незначимость коэффициента конкордации и свидетельствует о слабой связи между рассматриваемыми признаками.

Рассмотренный подход к оценке тесноты связи между ранжированными признаками-компонентами социально-профессиональной конкурентоспособности специалиста позволяет сделать следующие выводы.

1. При проведении исследования с использованием предложенной методики особое значение имеет решение вопроса о минимизации уровня субъективизма в работе экспертов. По нашему мнению, этого можно достичь при обязательном выполнении условия постоянства состава экспертной группы и формированием единой согласованной экспертно-групповой оценки.

2. Социологический подход к анализу понятия и структуры «социально-профессиональная конкурентоспособность специалиста» характеризуется тем, что признаки-компоненты могут оцениваться только относительными показателями, каждый из которых рассматривается в рамках определенной социально-профессиональной группы и фактически формируется в виде многомерного вектора приоритетов. В этой связи, используемые для определения коэффициента конкордации ранги признаков-компонентов социально-профессиональной конкурентоспособности специалиста, фактически являются координатами таких многомерных векторов приоритетов, формируемых с использованием метода анализа иерархий (МАИ). Данный вывод сделан нами на основе анализа накопленного опыта [5,6] в использовании МАИ для решения самых разнообразных задач как выбора оптимального решения, так и исследования компонентов структур. Кроме того, учитывался и опыт использования данного метода в исследовании проблем общей и профессиональной конкурентоспособности выпускников системы среднего профессионального образования университетского комплекса, проводимого с применением экспертной компьютерной системы поддержки принятия решений Expert Decide [2].

3. Социально-профессиональная конкурентоспособность, не являясь имманентным качеством специалиста, может быть оценена только в рамках группы специалистов, носителей аналогичных базовых характеристик. Это позволяет считать рассматриваемую методику перспективной с точки зрения возможности ее применения для комплексной оценки социально-профессиональных характеристик специалистов определенных профилей подготовки, формируемых в социокультурной среде различных учреждений системы профессионального образования.

Коэффициент конкордации $W$ может быть использован в качестве математической модели в форме показателя уровня системности при реализации процесса профессиональной социализации студентов в учреждениях системы профессионального образования: чем теснее связь между признаками-компонентами социально-профессиональной конкурентоспособности молодых специалистов, тем более высоким уровнем системности характеризуется управление этим процессом в социокультурном поле образовательного учреждения. Выявление обратной связи между ранжированными признаками-компонентами может характеризовать ситуацию недостаточно квалифицированного применения системы социальных технологий, что приводит к проявлению определенного уровня (высокого, среднего, слабого) энтропийных тенденций в социальной системе образовательного учреждения, причины и структура которых требует дополнительных исследований.

**Литература**

1. Морозова, А.В. Управление процессом профессиональной социализации студентов ссузов в условиях модернизации институтов образования: Монография. / А.В. Морозова, Н.А. Фролова – Орел: Издательство ОРАГС, 2005. – 200 с.
2. Морозова А.В. Технология применения метода анализа иерархий для исследования социальной и профессиональной конкурентоспособности выпускников / А.В. Морозова // Среднее профессиональное образование. Приложение. – 2003. - № 1. – С. 100-107.
3. Мэнкью Н.Г. Макроэкономика. - М.: МГУ, 1994.
4. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов – М.: Логос, 2001.
5. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. – М.: Радио и связь, 1993.
6. Шуметов В.Г., Орлов Г.М. Метод анализа иерархий в аналитической деятельности // Инновационные технологии в образовании: Матер. IX Междунар. конф. ИТО-99. – М.: МИФИ, 1999.
7. Ядов В.А. Социологическое исследование: методология, программа, методы. - Самара: Изд-во Самарского университета, 1995.

## МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТИПОЛОГИИ РЕГИОНОВ ПО КОМПЛЕКСУ ПОКАЗАТЕЛЕЙ РЫНКА ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УСЛУГ

**Т.Е. Никитина**

Орловская региональная академия государственной службы, г. Орел

Адекватным математическим методом, позволяющим выявить типологию регионов по комплексу показателей рынка образовательных услуг, является кластерный анализ. Обратимся к основным положениям типологического анализа, чаще всего осуществляемого с помощью данного метода – одного из методов многомерного статистического анализа.

В научной литературе под типологическим анализом многомерных объектов понимается метод их изучения, состоящий в выделении социально и экономически значимых, качественно отличных друг от друга, внутренне однородных групп объектов, характеризующихся совокупностью информативных признаков различной природы. Типологический анализ предполагает решение ряда задач [1]:

1. Построение априорной типологии. Входными данными при этом являются необходимые типообразующие признаки и соответствующие им эмпирические индикаторы.
2. Определение объекта типологии и формирование дополнительных типообразующих признаков.
3. Формирование типообразующих признаков, играющих роль факторов для объяснения существования искомых типов.
4. Формирование классифицируемой совокупности объектов.
5. Определение основания типологии.
6. Формирование совокупности эмпирических индикаторов, соответствующих типообразующим признакам.
7. Анализ свойств эмпирических индикаторов, на основе которых будут формироваться классификационные признаки.
8. Анализ структуры взаимосвязей эмпирических индикаторов, с целью формирования классификационных признаков.
9. Формирование классификационных признаков, которые «подаются» на вход алгоритма разбиения (группировки).

10. Выбор логики проведения разбиения, в том числе алгоритмов классификации и последовательности их применения.

11. Определение принципов и способов интерпретации классов.

12. Формирование однотипных групп объектов на основе либо объединения классов, либо их разъединения.

Основные, ключевые понятия типологического анализа – «тип», «типологический синдром», «типообразующие признаки», «основание типологии», «типология», «класс», «классификация». Понятие «тип» употребляется в трех смыслах и соответственно может иметь три значения: типический, типологический и типовой. Первое значение – типический – определяет единичное в изучаемом множестве объектов, второе значение – типологический – особенное и третье значение – типовой – общее в этом множестве. В типологическом анализе регионов по комплексу показателей рынка образовательных услуг нас интересуют, как правило, все три значения понятия «тип».

Понятие «типологический синдром» является актуальным при восходящей стратегии типологического анализа, когда нет априорных представлений о существовании типов объектов в изучаемом множестве. В этом случае изучается характер распределения того или иного эмпирического индикатора, который, предположительно, может «отвечать» за существование типов, т.е. вычисляются статистические характеристики распределения. Результатом такого представления может быть выделение типологических синдромов, под которыми понимается совокупность областей объектов.

Адекватным графическим приемом выявления таких областей в двумерном случае является представление исходных данных в виде диаграмм рассеяния, на которых изучаемые объекты изображаются точками с координатами, отвечающими каким-либо двум эмпирическим координатам. Тогда выявление типологических синдромов значительно упрощается. В случае многомерного признакового пространства построение таких двумерных диаграмм не гарантирует выделения подобных областей, и приходится прибегать к более формальным процедурам, пример которых описывается ниже.

Для уточнения гипотезы о типах, выдвинутой в результате применения восходящей стратегии анализа данных, необходимо обратиться к нисходящей стратегии – движению от общего к частному. Здесь на первое место выступает основание типологии как совокупность суждений о схожести объектов. Однако следует учитывать, что получаемые классы будут носить всегда формальный характер, и только их интерпретация с использованием других характеристик областей, неиспользованных в процессе классификации, может привести к искомым типам [1].

Для создания «объективных» классификаций (без априорных предположений о классах объектов) используется кластерный анализ. Кластерный анализ – это многомерный статистический метод, применяемый для выявления групп подобных объектов (кластеров). Объектами, чаще всего, являются статистические единицы – наблюдения (*Q*-кластеризация, или *Q*-техника), но могут быть и переменные (*R*-кластеризация, или *R*-техника) [2].

Продемонстрируем этапы *Q*-кластеризации на примере типологии регионов Центральной России (ЦФО) по показателям структуры рынка высшего профессионального образования (ВПО) в 2003 г. Согласно официальным статистическим данным [3], структура рынка ВПО рассматривается по следующим основным отраслевым специализациям: 1) промышленность и строительство; 2) сельское хозяйство; 3) транспорт и связь; 4) экономика и право; 5) здравоохранение и физическая культура; 6) образование; 7) искусство и кино.

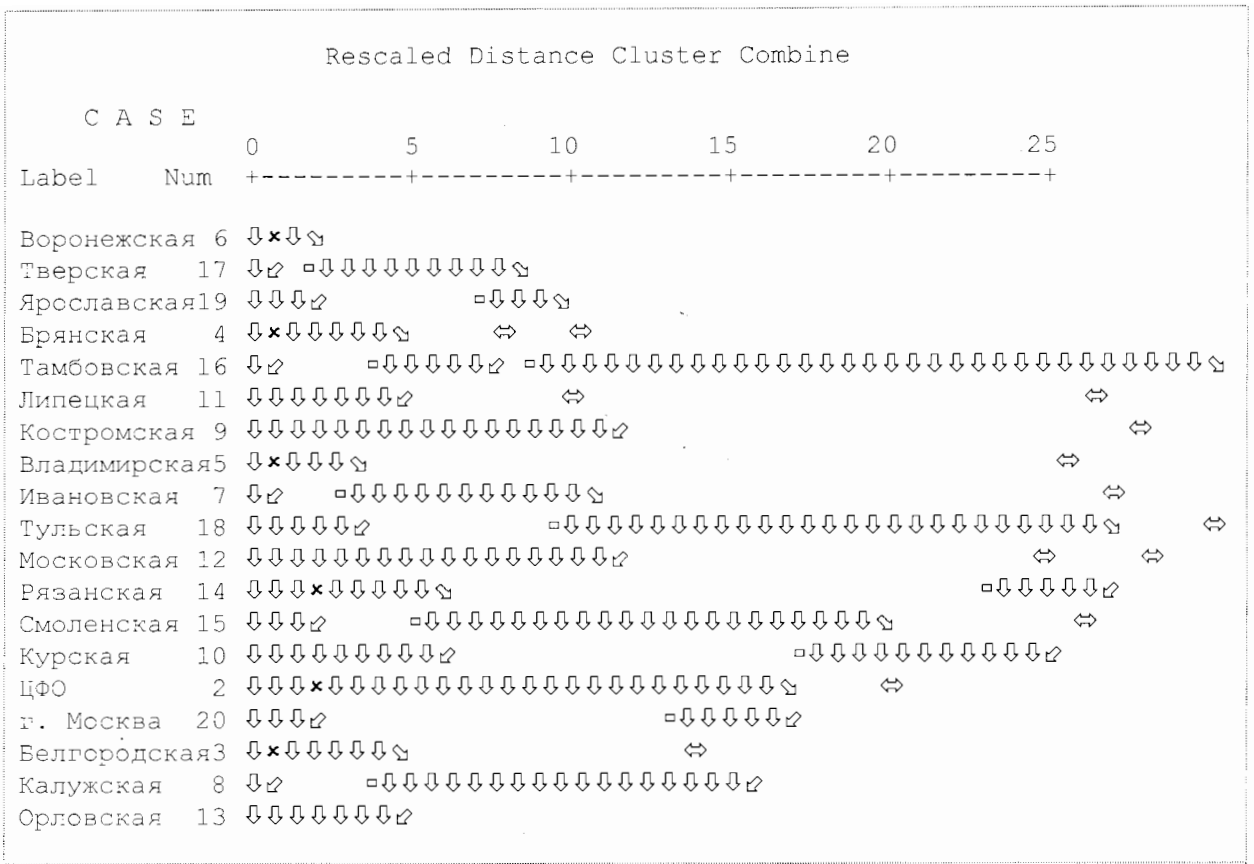



Рис. 1. Дендрограмма кластерного анализа регионов ЦФО по показателям структуры рынка ВПО (метод Уорда, квадратичная евклидова метрика)

Важным требованием кластерного анализа является независимость показателей структуры. Поскольку факторный анализ показал относительную самостоятельность показателей структуры рынка ВПО, многомерную группировку регионов проводили по всему комплексу показателей структуры.

На рис. 1 представлена дендрограмма иерархической кластеризации регионов по методу Уорда с квадратичной евклидовой метрикой, полученная в программной среде пакета анализа данных общественных наук SPSS Base 8.0 [4]. По дендрограмме можно выделить восемь кластеров, различие статистических единиц внутри которых не превышает 20% от максимального. Состав кластеров приведен в табл. 1.

Таблица 1. Состав кластеров регионов ЦФО по профилям структуры рынка ВПО (данные 2003 г.)

| Кластер | Состав кластера |
|---|---|
| 1 | ЦФО, г. Москва |
| 2 | Белгородская, Калужская и Орловская области |
| 3 | Брянская, Тамбовская и Липецкая области |
| 4 | Владимирская, Ивановская и Тульская области |
| 5 | Воронежская, Тверская и Ярославская области |
| 6 | Костромская область |
| 7 | Рязанская, Смоленская и Курская области |
| 8 | Московская область |

Как видно из рис. 1, ближе всего по структуре рынка ВПО к ЦФО в целом г. Москва (кластер 1).

Полезным методом оценки структурных отличий рынка ВПО по регионам кластера является графическое представление структуры рынка ВПО в виде профилей. В качестве примера на рис. 2 приведены профили структуры рынка ВПО по кластеру 1. Из сопоставления соответствующих профилей следует, что структура рынка ВПО г. Москвы отнюдь не идентична среднему уровню по ЦФО.

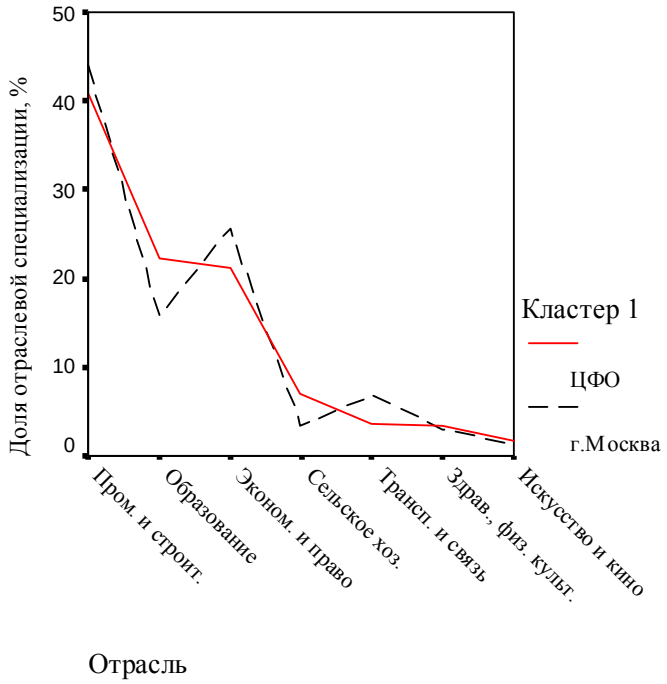



Рис. 2. Профили структуры рынка ВПО по кластеру 1

Выполним идентификацию кластера 1 по рис. 2 (в целях удобства сравнения профилей перед построением графиков графическими средствами пакета SPSS Base было выполнено ранжирование отраслевых специализаций ЦФО по их удельному весу). Сходство профилей г. Москвы и ЦФО – в повышенной доле такой отраслевой специализации, как промышленность и строительство (соответственно 44,0 и 40,9%), затем идут образование, экономика и право: доля последней в г. Москве 25,7% , а в ЦФО 21,2%. Эти три отраслевые специализации суммарно составляют большую часть приема студентов в вузы и Москвы, и ЦФО в целом – 85,5 и 84,4% соответственно. Именно это обстоятельство и предопределило принадлежность профиля структуры рынка ВПО Москвы и ЦФО к одному кластеру. Однако пропорции этих отраслевых специализаций несколько различаются, особенно по образованию: если в среднем по ЦФО эта доля 22,3%, то в г. Москве – 15,8%. Аналогично, имеются диспропорции и по отраслевым специализациям транспорта и связи, сельского хозяйства: доля последней в среднем по ЦФО в два раза больше – 6,9% против 3,4% в Москве.

Резюмируя, можно характеризовать г. Москву как регион с ярко выраженной отраслевой специализацией ВПО «промышленность и строительство», развитыми отраслевыми специализациями «образование», «экономика и право».

Аналогично кластеру 1 были получены профили структуры рынка ВПО по остальным кластерам.

Так, кластер 2 (Орловская, Белгородская и Калужская области) является группой регионов с равномерно представленными сегментами рынка ВПО «промышленность и строительство», «образование» и «экономика и право».

Кластер 3 (Брянская, Тамбовская и Липецкая области) является однородной группой регионов с преимущественной долей образования.

Кластер 4, представленный Владимирской, Ивановской и Тульской областями, можно характеризовать как однородную группу регионов с гармонично развитым сегментом рынка ВПО «промышленность и строительство».

Следующий кластер 5 образуют три региона: Воронежская, Тверская и Ярославская области. Этот кластер можно характеризовать как однородную группу регионов с гармонично развитыми отраслевыми специализациями ВПО «промышленность и строительство» и «образование».

Кластер 6 представляет один регион ЦФО – Костромская область. Характерная особенность структуры рынка ВПО Костромской области – высокие и близкие по значению сегменты рынка ВПО «промышленность и строительство», «образование» и «сельское хозяйство» (соответственно 35,1%, 33,2% и 29,7%).

Кластер 7 образуют Курская, Рязанская и Смоленская области. Его можно характеризовать как однородную группу регионов с развитыми отраслевыми специализациями ВПО «промышленность и строительство», «образование» и «экономика и право», с заметной долей сегментов «здравоохранение и физическая культура».

Кластер 8 представляет один регион ЦФО – Московская область. Характерная особенность структуры рынка ВПО Московской области – гипертрофированно высокая доля сегмента «промышленность и строительство», которая в 2003 г. составила 52,0%, а также заметная, относительно других регионов ЦФО, доля сегмента «искусство и кино».

Идентификацию кластеров удобно выполнить по ящичковым диаграммам, представляющим распределение показателей структуры по кластерам. В качестве примера на рис. 3 приведена ящичковая диаграмма для показателя структуры рынка ВПО «доля промышленности и строительства». Можно заключить, что доля этого сегмента максимальна в регионах кластера 4. Больше среднего значения по ЦФО (40,9%) доля этого сегмента в Московской области (кластер 8 – 52,0%) и в Москве (кластер 1 – 44,0%).

В регионах кластера 7 доля данного сегмента рынка ВПО минимальна. Наиболее симметричным является распределение регионов кластера 2 по доле сегмента рынка ВПО «промышленность и строительство»: медиана расположена посередине «ящичка», усики симметричны относительно сгибов. Наибольшие отклонения от симметричности наблюдаются в регионах кластеров 3, 4 и 7.

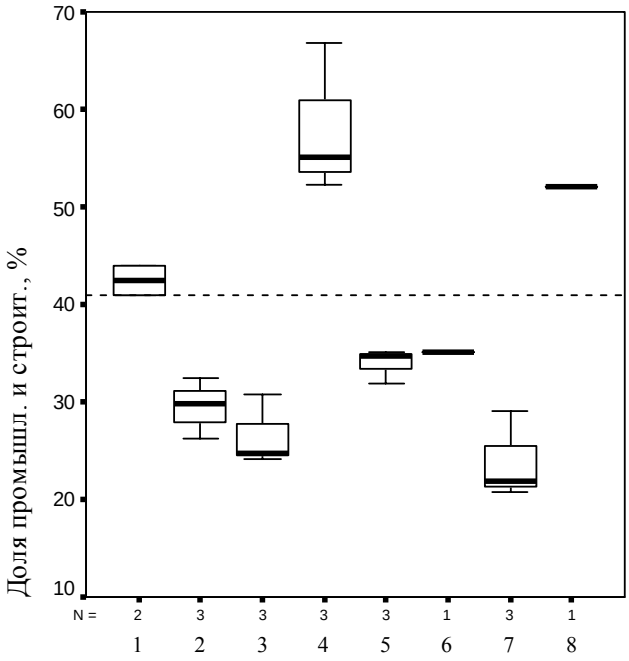



Рис. 3. Распределение доли промышленности и строительства по кластерам (данные 2003 г.)

В докладе представлен пример использования математических методов для классификации регионов ЦФО по комплексу показателей структуры рынка образовательных услуг по состоянию на 2003 год. Этот пример ярко демонстрирует эффективность кластерного анализа, как одного из методов многомерного статистического анализа, для решения задач типологизации тех или иных статистических объектов, характеризуемых набором информативных показателей. Результатами кластерного анализа является так называемое «кластерное решение» или «кластерная модель» – совокупность числа кластеров, их состава и характеристик кластеров. В совокупности с графическими приемами представления кластерной модели этот метод является мощным приемом исследования в различных прикладных областях знаний.

**Литература**

1. Татарова Г.Г. Типологический анализ в социологическом исследовании. М., 1993.
2. Шуметов В.Г. Кластерный анализ в региональном управлении. Орел: ОРАГС, 2001.
3. Проблемы и тенденции развития образования в Российской Федерации. Профессиональное образование. Региональный аспект. Статистический информационно-аналитический сборник. М.: ООО «Корвет», 2005.
4. SPSS Base 8.0 для Windows. Руководство по применению. М.: СПСС Русь, 1998.

# О ПРОГНОЗИРОВАНИИ РИСК-ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ УРОВНЕЙ ВРЕМЕННОГО РЯДА НА БАЗЕ МЕТОДОВ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ И КЛЕТОЧНЫХ АВТОМАТОВ[1]

**В.А. Перепелица**
Ставропольский государственный университет, г. Ставрополь
**Е.В. Попова**
Кубанский государственный аграрный университет, г. Краснодар
**А.М. Янгишиева**
Карачаево-Черкесская государственная технологическая академия, г. Черкесск

*Используемые в работе инструментальные и математические методы представляют собой принципиально новую базу для прогнозирования дискретных эволюционных процессов. Авторы предлагают завершенную систему моделей и методов прогнозирования временных рядов с памятью на базе теории нечетких множеств и линейных клеточных автоматов.*

Актуальность предмета настоящего исследования приобрела особо важное экономическое значение после наводнения имевшего место по реке Кубань в июне 2002 года, убытки от которого оцениваются суммой порядка 0,5 млрд. долларов.

Предпрогнозное исследование временного ряда годовых объемов стока горных рек осуществляется авторами на основе фрактального анализа, основателем которого является британский гидролог Х.Е. Херст. Исследуя статистику объемов стоков рек, он предложил новую статистическую методологию для различения случайных и неслучайных систем, постоянства трендов и продолжительности циклов, если таковые имеются. Херст показал, что большинство естественных явлений, включая речные стоки, температуры, осадки, солнечные пятна, следуют «смещенному случайному блужданию» - тренду с шумом. Сила тренда и уровень шума могут быть оценены тем, как изменяется нормированный размах ВР со временем, или, другими словами, насколько введенная им величина $H \in (0;\ 1)$, называемая показателем Херста, превосходит значение 0,5.

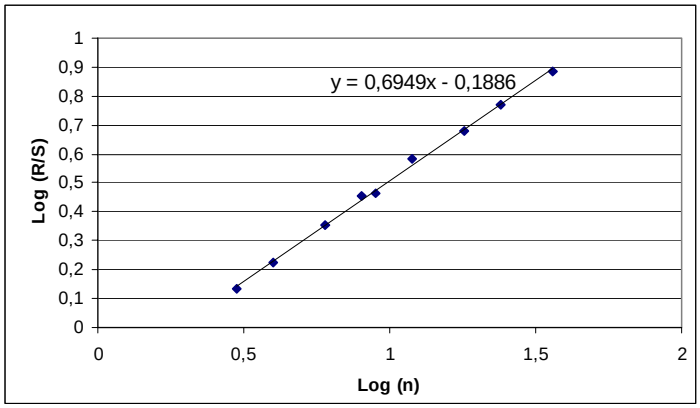



Рисунок 1 - R/S траектория для годовых объемов стока горной реки Кубань с 1926 по 2004гг.

Если уровни временного ряда отражают «чисто случайный процесс» (являются независимыми случайными величинами), то в соответствии с классической статистикой для такого ВР значения показателя Херста $H \approx 0{,}5$. Исследованные Херстом, а позже

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 06-01-00020а

Мандельбротом и др. многочисленными авторами природные временные ряды (выпадение осадков, пятна на солнце, годичные кольца и т.д.) обладают долговременной памятью [1], в силу чего показатель Херста для каждого из этих ВР принимал значение, превосходящее число 0,7 (см. рис.4.1. в [2]). Приведем, как пример значения показателей Херста для некоторых гидрологических и климатических временных рядов (за период инструментальных наблюдений более 100 лет): для стока Волги этот показатель составляет 0.752, Днепра - 0.621, Немана - 0.647, Дуная - 0.837; для годовых поступлений воды в Каспийское море - 0.767, оз.Балхаш - 0.711, Большое Соленое - 0.682, Чад - 0.690, Чаны - 0.813; для ширины годовых колец сосны и дуба соответственно - 0.764 и 0.676; для среднегодовых температур воздуха Северного полушария - 0.825, температур Москвы и Санкт-Петербурга соответственно - 0.749 и 0.653. Интересно отметить близость величин H для стока Волги и приращений Уровня Каспийского моря (0.752 и 0.767).

Согласно алгоритму, подробно представленному в работе [2], показатель Херста для годовых объемов стока горной реки Кубань равен 0.6949 (см. рис.1), т.е. H>0.5 и, следовательно, можно делать вывод о наличии так называемой долговременной памяти у исследуемого временного ряда.

Найти нечеткое значение глубины памяти представляется возможным при использовании алгоритма последовательного R/S-анализа, подробное изложение которого представлено в [3]. Результат работы вышеуказанного алгоритма представлен на рисунке 2.

Рисунок 2 - Гистограмма значений глубины памяти ВР объемов стока горной реки Кубань за период с 1926г. по 2004г.

Выводы, вытекающие из результатов выполненных расчетов, состоят в следующем:

1. Глубина памяти конкретного ВР не является фиксированным числом; её величина меняется вдоль рассматриваемого ВР, т.е. для различных его отрезков она является различной, например, как видно из рисунка 2 для ВР $Z$ численные значения глубины памяти колеблются в отрезке натурального ряда 2, 4,…,12.

2. Для численного представления глубины памяти рассматриваемого ВР (1) $Z$ наиболее целесообразным является математический аппарат теории нечетких множеств.

Обнаружение долговременной памяти в стоках горных рек является не самоцелью, а служит объективным обоснованием принципиальной возможности построения прогнозной модели, в процессе работы учитываются все существенные факторы, которыми обусловлено наличие этой памяти. Именно такой, по мнению авторов, является прогнозная модель на основе линейного клеточного автомата.

Для целей иллюстрации, валидации и верификации предлагаемой модели рассматриваем временной ряд

$$Y: y_i,\ i=\overline{1,n} \qquad (1)$$

максимальных объемов стока горной реки Кубань (показания снимаются на территории Карачаево-Черкесской республики (КЧР)) за период с 1946 по 2003 годы, которые перенумерованы индексом $i=1,2,...,n$ где $n$=2003–1946+1=58; $y_i$ – максимальный объем стока (тыс.куб) горной реки Кубань в $i$-ом году. С целью визуализации этого ряда на рисунке 3 дано графическое представление этого ряда в виде гистограммы.

Алгоритм прогнозирования на базе клеточного автомата реализуется в системном единстве с процессом моделирования долговременной памяти и завершается получением прогноза, включая валидацию (оценивание погрешности результата). Работа алгоритма состоит из следующих пяти этапов.

**Этап 1.** Оценка степени прогнозируемости на базе методов фрактального анализа.

**Этап 2.** Представляется в виде специального метода, т.е. алгоритма $\alpha_1$ перевода данного ВР (1) в ЛВР (2). Этот алгоритм состоит из трех шагов.

Шаг 1. Начинается с визуализации гистограммы, представляющей ряд (1) на рисунке 3. На этой гистограмме предварительно исключаем пороговые значения объемов стока реки, затем из оставшихся уровней выделяем жирными точками столбики, составляющие высокий объем стока реки, и столбики, представляющие низкий объем стока реки (см. рисунок 3). Далее, соединяя соседние жирные точки пунктирными отрезками, получаем, как показано на рисунке 3 верхнюю огибающую ломанную (ВОЛ) и нижнюю огибающую ломанную (НОЛ).

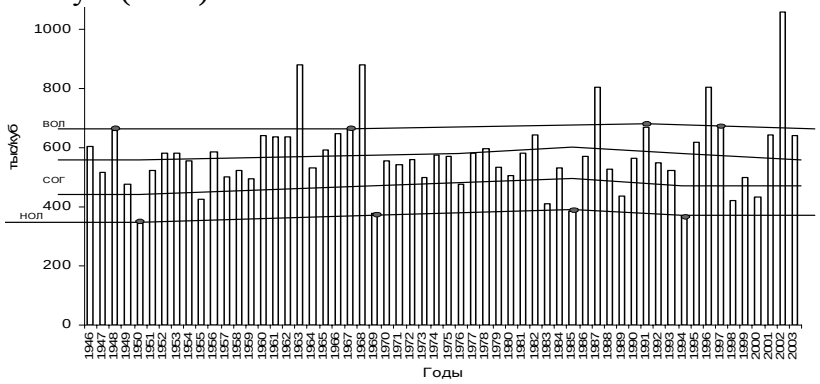



Рисунок 3 – Гистограмма ВР (1) после 1-го и 2-го этапов алгоритма

Шаг 2. Последовательно для каждого столбика гистограммы рассматриваем отрезок, соединяющий точку его пересечения с НОЛ, с точкой его пересечения с ВОЛ. Этот отрезок делим на три равновеликих интервала: нижний, средний и верхний. Отмечаем на каждом из таких отрезков концы среднего интервала, после чего каждую пару соседних верхних (нижних) концов средних интервалов соединяем пунктирным отрезком, в результате чего получаем границы срединной области гистограммы (СОГ).

Шаг 3. Временной ряд вида (1) преобразуем в ЛВР при этом принимаем, что множество $\overline{U}$ состоит из трех элементов: $u=H$ – низкий объем стока реки, $u=C$ – средний объем стока реки, $u=B$ – высокий объем стока реки и $u=П$ – пороговое значение объема стока реки. Заменяя элементы $y_i$ ряда (1) соответствующими термами из $\overline{U}$, получаем ЛВР

$$U: u_i,\ i=1,2,...,n. \qquad (2)$$

Работа третьего шага, а вместе с ним и работа алгоритма заканчивается тогда, когда элемент $y_n$ ряда (1) заменяется соответствующим термом. Тем самым ЛВР (2) считается построенным.

**Этап 3.** На этом этапе формируется оперативная память или память клеточного автомата. Эта память может иметь либо комбинаторное представление, либо теоретико-

графовое представление. В последнем случае она строится в виде множества 2-дольных ориентированных графов (орграфов), в каждом из которых вершины второй, т.е. правой доли взаимооднозначно представляют собой элементы терм-множества $U$. Для каждого фиксированного $l$ вершины первой, т.е. левой доли взаимооднозначно представляют собой $l$ –конфигурации, встречающиеся в ЛВР; значения $l$=1,2,…,$L$, где $L$ –глубина памяти ЛВР. Дугам этих орграфов приписаны веса. Вес дуги означает частость переходов соответствующей конфигурации в соответствующий элемент терм-множества.

**Этап 4.** Алгоритм формирования прогноза для данного ЛВР $u_i$, $i=1,2,...,n-1$, т.е. алгоритм вычисления и представления прогнозируемого элемента $u_n$ в виде нечеткого множества (НМ) $U^n(\mu)=\{(u_j,\mu_j)\}$, где $\mu_j$ - значение функции принадлежности элемента $u_j \in U$, $j=1,2,...,m$, $m=|U|$. Поскольку перечень $u_j \in U$ является известным, то формирование прогноза в виде НМ сводится к вычислению значений $\mu_j$, $j=\overline{1,m}$ путем суммирования и нормирования частостей, т.е. весов соответствующих дуг в последовательности орграфов, затребованных из оперативной памяти. Для вычисления значений функции принадлежности $\mu_j$ в первых долях затребованных орграфов эти дуги выделяются вершинами, которые соответствуют $l$ –конфигурациям из заключительного отрезка $u_{r-1},u_r,...,u_{n-1}$ рассматриваемого ЛВР, $r=n-L-1$.

**Этап 5.** Алгоритм трансформации прогноза в виде нечеткого терм-множества (НТМ) в числовой прогноз с помощью использования процедуры дефазификации НМ [4].

Процесс обучения линейного клеточного автомата представляет собой творческий процесс, который заключается в подборе раскраски уровней временного ряда. Результаты предварительной валидации предложенной раскраски должны показать меньшую погрешность ошибки прогноза. Процесс предварительной валидации результатов выбранной раскраски клеточного автомата заключается в следующем:

1. Прогнозная модель реализуется на базе лингвистических переменных;
2. Выявляются на уровне лингвистических переменных неугаданные значения.

Результаты валидации: количество угаданных уровней – 41 шт. (на рис.4 помечены знаком «+»), количество неугаданных уровней – 11 шт. (на рис.4 помечены знаком «-»). Достижение цели на уровне лингвистических переменных (спрогнозировать риск-экстремальные значения временного ряда) дает возможность говорить о результативности предложенного варианта *обучения* клеточного автомата.

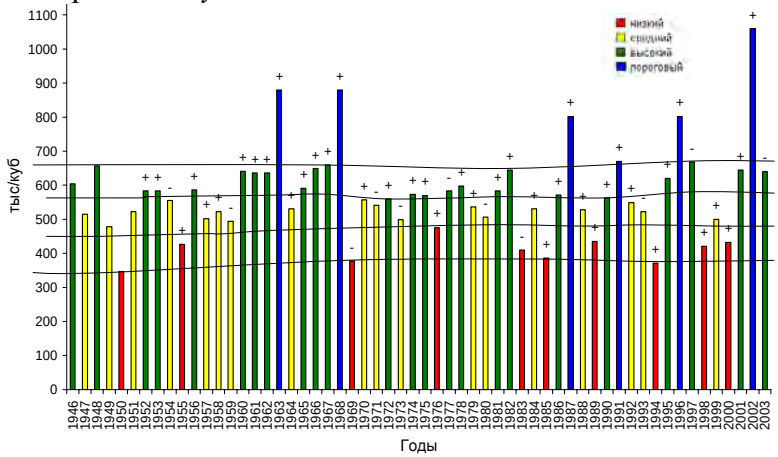



Рисунок 4 – Временной ряд максимальных месячных стоков (по годам) и его преобразование в лингвистический временной ряд для клеточного автомата

Результаты проведенного исследования полезны для развития теории моделирования экстремумов, т.к. в процессе верификации клеточно-автоматной прогнозной моде-

ли оказались точно спрогнозированы все риск-экстремумы рассматриваемого временного ряда (1).

Результат применения вышеописанного алгоритма - лингвистическое прогнозное значение максимального объема стока реки Кубань

$$U_{n+1}^0 = \{(H;0{,}83),(C;0{,}05),(П;0{,}05),(B;0{,}66)\}. \qquad (3)$$

Приведем описание процесса преобразования лингвистического нечеткого множества (ЛНМ) (3) в числовое (классическое) НМ

$$Y_{n+1}^0 = \{(y_H^0;\mu_H),(y_C^0;\mu_C),(y_П^0;\mu_П),(y_B^0;\mu_B)\}\ .$$

В качестве подходящих числовых значений элементов $y_u^0$, $u \in \{H, C, П, B\}$ выбираются в ВР $Y$ (1) ближайшие к элементам $y_u$ низкие, средние, высокие и пороговые объемы, которые затем усредняются:

$$y_H^0 = \frac{1}{2}(y_{53} + y_{55}) = \frac{1}{2}(421 + 432{,}5) = 426{,}75;\ y_C^0 = y_{54} = 500;$$

$$y_П^0 = \frac{1}{2}(y_{51} + y_{57}) = \frac{1}{2}(802 + 1060) = 931;\ y_B^0 = \frac{1}{2}(y_{56} + y_{58}) = \frac{1}{2}(645 + 640) = 642{,}5.$$

Отсюда, с учетом представленных в ЛНМ (3) значений функции принадлежности $\mu_H$, $\mu_C$, $\mu_П$, $\mu_B$ получаем искомый прогноз в виде НМ

$$Y_{n+1}^0 = \{(426{,}75;0{,}83),(500;0{,}05),(931;0{,}05),(642{,}5;0{,}06)\}$$

Применяя к НМ $Y_{n+1}^0$ операцию дефазификации, получаем прогнозное значение максимального объема стока реки Кубань в обычном числовом виде, т.е

$$Y_{n+1}^0 = \sum_{t=1}^{4} \mu_t y_t^0 = 0{,}83 \cdot 426{,}75 + 0{,}05 \cdot 500 + 0{,}05 \cdot 931 + 0{,}06 \cdot 642{,}5 = = 464{,}3 \text{ тыс.куб},$$

где индексом $t = 1, 2, 3, 4$ перенумерованы соответственно термы *H, C, П, B:*

$\mu_1 = \mu_H = 0{,}28$, $\mu_2 = \mu_C = 0{,}39$, $\mu_3 = \mu_B = 0{,}33$.

Согласно определению прогнозной модели на ее выходе можно получить ВР $Y^0$ прогнозных значений $y_i^0$, $i = L, L+1, ..., n$, занумерованных тем же индексом, которым были занумерованы значения максимальных объемов стока горной реки Кубань в ВР (1). Тогда относительная погрешность прогнозирования для каждого наблюдения $i \in \{L, L+1, ..., n\}$ вычисляется по формуле $\varepsilon = \dfrac{|y_i - y_i^0|}{y_i}$. В качестве оценки точности прогнозирования принимаем среднее значение $\varepsilon = \dfrac{1}{n - L + 1}\sum_{i=L}^{n} \varepsilon_i$.

На основании валидации результатов прогнозирования ВР максимальных объемов стока горной реки Кубань получена оценка средней погрешности прогноза $\varepsilon \le 26{,}8\%$.

Используемые в работе инструментальные и математические методы представляют собой принципиально новую базу для прогнозирования дискретных эволюционных процессов. Эти методы позволяют провести предпрогнозное исследование, результатом которого является выявление и формирование перечня фундаментальных свойств, характеризующих динамику временного ряда, для уровней (наблюдений) которых не выполняются условия независимости (глубина долговременной памяти, персистентность или антиперсистентность, трендоустойчивость или реверсирование чаще случайного, цвет шума) и сформулировать для каждого свойства его содержательную интерпретацию в контексте проблемы прогнозирования; что в свою очередь предлагает завершенную

систему моделей и методов прогнозирования этих рядов на базе теории клеточных автоматов.

**Литература**

1. Петерс Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка. – М.: Мир, 2000. – 333 с.
2. Петерс Э. Фрактальный анализ финансовых рынков: Применение теории Хаоса в инвестициях и экономике. – М.: Интернет-трейдинг, 2004. – 304с.
3. Перепелица В.А., Попова Е.В., Леншова Т.М., Янгишиева А.М. Предпрогнозный анализ объемов стока горных рек, как элемент экономической безопасности региона. //Вестник Воронежского университета, серия «Экономика и управление», –№1 . –2005 . – С.73-84
4. Жирабок А.Н. Нечеткие множества и их использование для принятия решений //Соросовский образовательный журнал. - 2001.- Том 7, №2. - С. 109-115.

## МОДЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕГИОНАЛЬНЫХ НОРМАТИВОВ СТОИМОСТИ ЛЕЧЕНИЯ В СТАЦИОНАРЕ НА ОСНОВЕ ИЕРАРХИЧЕСКИХ НЕЧЕТКИХ БАЗ ЗНАНИЙ

**Т.Н. Русских**
Орловский государственный университет, г. Орел

Важнейшей задачей при оценке общей необходимой стоимости лечения населения Орловской области является определение среднего норматива стоимости лечения в будущем периоде страхования. Зачастую этот показатель жестко фиксируется дискретными значениями, что, как правило, не соответствует практической действительности. Очевидно, что трудно достаточно точно предсказать, сколько дней в процессе лечения понадобится пациенту до полного выздоровления, а, следовательно, вместе с тем определить и необходимую стоимость лечения. Поэтому, на наш взгляд, аппарат нечеткой математики, связанный с обработкой неточной информации и мягкими вычислениями, наиболее адекватно позволит моделировать процессы, отражающие сущность регионального медицинского страхования.

Итак, как отмечалось выше, одной из главных задач медицинского страхования является разработка тарифа стоимости лечения соответственно в стационаре, дневном стационаре, амбулаторно – поликлиническом учреждении. Несмотря на принятые Федеральным Фондом ОМС нормативы, показатель стоимости лечения на уровне отдельного региона отличаются от общеустановленных. Имеющиеся в практике медицинского страхования отклонения от стандартов обусловлены влиянием ряда факторов, как индивидуального характера для отдельных застрахованных лиц, так и факторов, характеризующих в целом социально – экономическое положение региона. Поскольку в рамках обязательного медицинского страхования, в отличие от добровольного, в виду принципа солидарности не учитываются индивидуальные особенности отдельного застрахованного лица, то наибольшую практическую значимость и интерес представляют анализ и оценка факторов, характеризующих заболеваемость населения региона в целом.

Моделирование величины норматива стоимости лечения в стационаре, исходя из реальных потребностей населения региона, в зависимости от количественных оценок основных факторов, определяющих в целом заболеваемость населения, и является предметом данного исследования.

Среди основных факторов, влияющих на установление определенных нормативов стоимости лечения $Y$ в стационаре на региональном уровне, на наш взгляд (с учетом экспертного мнения медицинских работников), можно выделить следующие:

1) экологические факторы (например, сюда включаются уровень загрязнения атмосферного воздуха, воды),

2) экономические факторы (одна из наиболее важных составляющих – доля населения с доходом ниже прожиточного минимума),

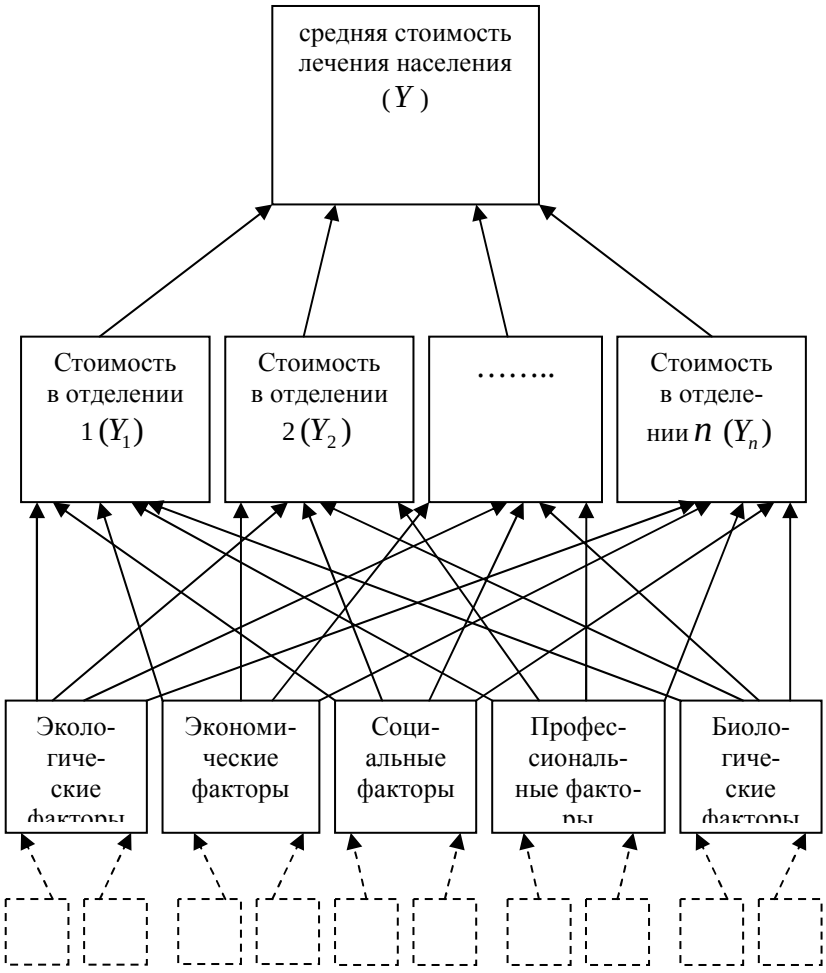
3) социальные факторы (уровень роста наркомании, алкоголизма и других болезней социальной окраски),

4) профессионально вредные факторы (увеличения числа рабочих, занятых на вредном производстве, увеличения стажа работы на предприятие с вредным производством),

5) биологические факторы (в качестве основного можно выделить уровень роста числа наследственных заболеваний, рост числа заболеваний в анамнезе).

По мнению экспертов, указанные выше факторы можно рассматривать, как факторы риска заболеваемости населения региона в целом, а также в качестве факторов, за счет которых происходит увеличение стоимости лечения.

Очевидно, что стоимость лечения в различных отделениях может в большей или меньшей степени отклоняться от средне установленного норматива. Более того, каждый из перечисленных факторов может оказывать или не оказывать существенное влияние на возникновение определенного вида заболеваемости, что и определяет увеличение или уменьшение длительности, а значит и стоимости лечения. Для экспертов оказывается достаточно сложно определить влияние факторов на общую заболеваемость, однако оп-



ределение данного влияния на конкретные заболевания упрощает экспертам расстановку приоритетов. Поэтому введем показатели стоимости лечения в различных отделениях и обозначим их соответственно $Y_1, Y_2, ..., Y_n$. Основываясь на сформулированных выше положениях, иерархия, отражающая последовательное влияние факторов на исследуемый показатель (вершину иерархии – стоимость лечения) показана на предыдущей странице.

В рамках данного проводимого исследования не будем детализировать и уточнять основные отделения, отобранные для рассмотрения. Это предстоит решить с помощью экспертного опроса в дальнейших работах, отметим лишь тот факт, что акцент в выборе будет сделан на региональные особенности темпов роста заболеваемости населения и состояние областного здравоохранения.

Таким образом, построенная иерархия имеет два уровня (сплошные линии связи). Однако в дальнейшем изложении станет очевидным, что каждый из предложенных факторов должен быть качественно измерим, в виду этого может возникнуть необходимость рассмотрения третьего уровня иерархии (пунктирные линии связи). Это обусловлено тем, что дать общую оценку фактору (например, профессионально вредный фактор) иногда на практике достаточно сложно даже компетентному эксперту. Если же при этом выделить его основные составляющие, то не составит особого труда эксперту каждую из них приближенно оценить на языке нечетких высказываний.

Пусть $X_1$- уровень или степень проявления экологического фактора, $X_2, X_3, X_4, X_5$ уровни или степени проявления экономического, социального, профессионально вредного и биологического факторов соответственно.

Стоимость лечения $Y$ и показатели $Y_1, Y_2, ..., Y_n, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$, перечисленные выше, представим в качестве лингвистических переменных, терм – множества которых определяются трапецеидальными функциями принадлежности.

В качестве значений терм – множества переменных $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ можно выделить нечеткие множества вида:

*«очень низкий уровень проявления фактора»*,
*«низкий уровень проявления фактора»*,
*«средний уровень проявление фактора»*,
*«высокий уровень проявления фактора»*,
*«очень высокий уровень проявления фактора»* соответственно.

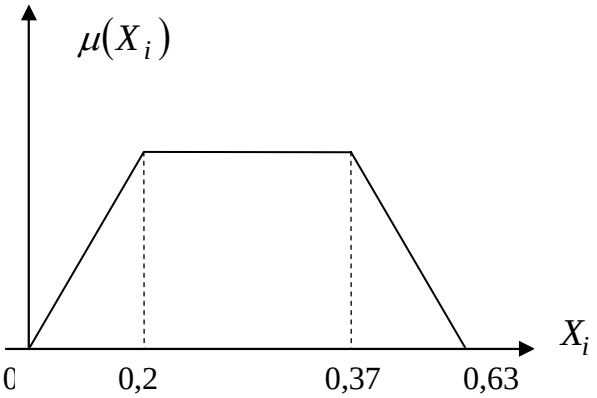
При этом можно аналогично задать терм – множество переменных $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, определяющих стоимость лечения в соответствующих отделениях:

*«низкая стоимость»*,
*«средняя стоимость»*,
*«высокая стоимость»*.

Для задания функций принадлежности указанных нечетких множеств проявления соответствующих факторов можно использовать нечеткую числовую шкалу Харрингтона, которая выглядит следующим образом:

0 – 0,2 – очень низкое проявление свойств,
0,2 – 0,37 - низкое проявление свойств,
0,37 – 0,63 – среднее проявление свойств,
0, 63 – 0,8 – высокое проявление свойств,
0,8 – 1 – очень высокое проявление свойств.

Тогда, например, функция принадлежности терма «низкий уровень проявления фактора» примет вид:




Для моделирования построенной иерархической зависимости будем использовать систему нечеткого логического вывода. При этом лингвистические переменные средней стоимости лечения в различных отделениях $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ первой базы знаний нечеткого логического вывода, где они выступают в качестве выходных переменных, можно представить в виде:

$$Y_i = f_i(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5), \overline{i = 1, n}.$$

Если в процессе моделирования возникнет, как отмечалось выше, необходимость построения дополнительного нижнего уровня иерархии, то каждая из рассмотренных входных переменных $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$ будет в свою очередь являться выходной переменной новой базы знаний нечеткого логического вывода:

$$X_j = g_j(Z_1, Z_2, ..., Z_k), \overline{j = 1,5}\ .$$

Поскольку в оперативной памяти человека может храниться одновременно не более $7 \pm 2$ понятий – признаков, то многие авторы склонны утверждать, что адекватные базы знаний получаются, если количество входных переменных не превышает пяти – шести. Поэтому, возвращаясь к вопросу об основных отделениях, стоит отметить, что их количество следует брать не слишком большим, выделяя тем самым лишь основные группы заболеваний (например, заболевания органов пищеварения, дыхания, системы кровообращения, новообразования, заболевания эндокринной системы, нервной системы).

Для получения значений выходных переменных необходимо задать экспертную нечеткую базу знаний, состоящую, например, из высказываний вида: «*если* $X_1$ *низкий и* $X_2$ *средний и …, то Y средний*».

На основе построенных иерархических баз знаний получаем значения стоимостей лечения в различных отделениях $Y_1, Y_2, ..., Y_n$, тогда общую стоимость лечения можно представить в виде:

$$Y = f(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n, Y_1, Y_2, ..., Y_n),$$

где $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ - весовые коэффициенты, которые определяют степень влияния стоимостей лечения в различных отделениях на среднюю стоимость лечения в стационаре.

Очевидно, что $\sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1$.

Данные весовые коэффициенты можно определить, как отношение числа обратившихся за медицинской помощью в соответствующее отделение к общему числу наступления страховых случаев.

Путем агрегирования полученных значений стоимостей в различных отделениях с учетом весовых коэффициентов получаем среднюю стоимость лечения одного застрахованного лица в стационаре.

Предложенная модель позволит определить необходимую общую стоимость лечения в стационаре путем умножения полученной величины норматива стоимости лечения на общее количество застрахованных в области. Полученный результат отражает реальное состояние региональной системы медицинского страхования с точки зрения необходимой стоимости лечения, исходя из потребности населения в оказании медицинской помощи.

**Литература**

1. Т. Саати. Принятие решений. Метод анализа иерархий. Перевод с английского Р.Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993. – 320 с.
2. Штельмах Л.Г. Государственное регулирование ОМС населения в условиях построения социально ориентированной экономики региона. Монография. Орел: Изд-во ОРАГС, 2004. – 184 с.
3. Электронный ресурс: www.exponenta.ru

## ОПТИМИЗАЦИЯ УРОВНЯ РИСКА В ХОДЕ ПРИНЯТИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫХ РЕШЕНИЙ

**А.Б. Секерин**
Орловский государственный университет, г. Орел

*В работе [1] автором рассматривался вопрос о ресурсном проявлении риска в ходе управления инвестиционным портфелем. Данное проявление заключается в том, что желание инвестора увеличить максимально возможную доходность портфеля сопряжено с необходимостью увеличения уровня принимаемого риска. При этом существует некоторый оптимальный уровень риска, обеспечивающий максимально возможную доходность, и дальнейшее увеличение уровня риска неэффективно. Данные результаты основаны на следующем свойстве решения задачи нелинейного программирования.*

Пусть $A$ – выпуклый компакт в $R^n$, $m(y)$ – выпуклая вверх функция, заданная на $A$. Пусть, далее $g(y)$ – непрерывная, действительно-значная функция, также заданная на $A$. Рассмотрим следующую задачу нелинейного программирования

$$\begin{gathered} m(y) \to \max \\ y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in A, \\ g(y) = R, \end{gathered} \qquad (1)$$

где число $R$ рассматривается как параметр. Очевидно задача (1) имеет смысл при выполнении условий $R_{min} \le R \le R_{max}$, где $R_{min}=min\{g(y),\ y \in A\}$, $R_{max}=max\{g(y),\ y \in A\}$. Введем также обозначения $A_R=\{ y \in A: g(y)=R\}$, $M(R)= max\{m(y),\ y \in A_R \}$. Нас будет интересовать поведение функции $M(R)$ на отрезке $[R_{min}, R_{max}]$. Положим $M_0 = max\{m(y),\ y \in A\}$. Пусть далее $A^{M_0} = \{ y \in A: m(y)= M_0\}$, $R_0' = min\{g(y): y \in A^{M_0} \}$, $R_0'' = max\{g(y): y \in A^{M_0} \}$.

Очевидны следующие неравенства: $R_{min} \le R_0' \le R_0'' \le R_{max}$ . В этих обозначениях справедлива

Теорема 1 [1]. На отрезке $[R_{min}, R_0']$ функция $M(R)$ строго возрастает; на отрезке $[R_0'', R_{max}]$ - строго убывает; на отрезке $[R_0', R_0'']$ верно $M(R) \equiv M_0$.

В приложениях теоремы 1 к задаче управления риском инвестиционного портфеля функция *g(y)* играет роль меры риска, а функция *m(y)* равна ожидаемой доходности портфеля. Таким образом, для увеличения максимально возможной доходности необходимо увеличение уровня принимаемого риска от $R_{min}$ до $R_0'$, т.е. $R_0'$ в этом смысле оптимальный уровень риска.

В классической портфельной теории график функции *M(R)* на отрезке $[R_{min}, R_0']$ называется эффективной границей [2] . При этом в классической постановке функция *m(y)* линейна, а функция *g(y)* представляет собой квадратичную форму, значения которой равны дисперсии портфеля. При этих условиях известно [2] , что функция *M(R)* на отрезке $[R_{min}, R_0']$ является возрастающей выпуклой вверх функцией, т.е., в частности, непрерывной. Таким образом, теорему 1 можно трактовать как обобщение свойств эффективной границы портфеля.

Теорема 1 позволяет использовать любые меры риска, задаваемые непрерывными функциями. В частности может использоваться известный VAR-критерий. Пусть, как в классической постановке доходности отдельных ценных бумаг выражаются случайными величинами $X_1,\ldots,X_n$, $m_j=E(X_j)$ – ожидаемые доходности, а $m(y)=y_1m_1+\ldots+y_nm_n$ – ожидаемая доходность портфеля в зависимости от долей вложений $y_1,\ldots,y_n$. Пусть далее функция $g_M(y)$ равна вероятности того, что доходность портфеля будет ниже наперед заданной величины *M*, т.е. $g_M(y) = P(y_1X_1+\ldots+y_nX_n<M)$. Функцию $g_M(y)$ также можно понимать как меру риска портфеля, поскольку, чем ниже ее значение, тем более гарантировано получение доходности, не меньшей *M*. Мы рассмотрим стандартный портфель, не учитывая возможности безрискового заимствования, т.е. доли вложений $y_1,\ldots,y_n$ предполагаются неотрицательными числами, в сумме равными 1. Таким образом, выпуклый компакт *A* имеет вид $A=\{y=(y_1,\ldots,y_n)\in \breve{Y}^n : 0\le y_j,\ y_1+y_2+\ldots+y_n=1\}$. Пусть, как и выше, $M_0=max\{m(y), y\in A\}$, $R_0' = inf\{g_M(y): y\in A^{M_0}\}$, $R_0'' = sup\{g_M(y): y\in A^{M_0}\}$, $A_R=\{y\in A: g(y)=R\}$, $M(R)=sup\{m(y), y\in A_R\}$, $R_{min}=inf\{g(y), y\in A\}$, $R_{max}=sup\{g(y), y\in A\}$.

Теорема 2. Пусть величины $X_1,..,X_n$ таковы, что многомерная случайная величина $(X_1,..,X_n)$ имеет плотность вероятности, задаваемую суммируемой по Лебегу функцией $\varphi(t_1, t_2,..,t_n)$. Тогда функция *M(R)* строго возрастает на $[R_{min}, R_0']$, строго убывает на $[R_0'', R_{max}]$ и равна $M^0$ на $[R_0', R_0'']$.

Теорема 2 является прямым следствием теоремы 1, поскольку в условиях теоремы верно

$$g(y) = \int\limits_{y_1m_1+\ldots+y_nm_n<M} \varphi(y_1, y_2,\ldots,y_n)dy,$$

откуда следует непрерывность функции *g(y)*. Таким образом, в случае $R_{min} < R_0'$ риск, выражаемый вероятностью $P(y_1X_1+\ldots+y_nX_n<M)$ проявляет себя как ресурс – для увеличения доходности в диапазоне от $M(R_{min})$ до $M(R_0')$ требуется увеличение уровня риска.

**Литература**

1. Секерин А.Б. Модели управления риском на основе концепции риска как ресурса // Материалы межд. конф. «Экономическое прогнозирование: Модели и методы – 2006», Воронеж, ВГУ, 2006. Ч. II. С. 95-99.

2. Шарп У., Александер Г., Бэйли Дж. Инвестиции: Пер с англ. – М.:ИНФРА-М , 2001. – XII, 1028 с.

# ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ОФИСНОЙ ПРОГРАММНОЙ СРЕДЫ В ПРЕПОДАВАНИИ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

**А.Г. Филонов, Г.Н. Абрамова**
Орловская региональная академия государственной службы, г. Орел
**А.Ф. Плеханов**
Орловское ОСБ 8595, г. Орел

*Позднее включение России в рыночные отношения явилось главной причиной бурного развития всех направлений финансовой деятельности в стране. Зародились и вышли на мировой уровень отечественные фондовые рынки, набирают мощь современные страховые компании, укрепляются деловые отношения производителей с инвесторами, расширяется финансовый лизинг и т.д. Это обстоятельство требует постоянной корректировки учебных планов и программ подготовки специалистов финансовой сферы.*

Устойчивое развитие любого экономического направления, в том числе финансовой системы региона, определяется главным образом тем, насколько она вооружена современной наукой и передовой техникой. Качественный информационно-коммуникационный прорыв способствовал возникновению и развитию электронной коммерции, главной составной частью которой являются электронные расчеты и услуги. А непрерывно растущие потоки информации, постоянное усложнение технологии расчетов и необходимость проведения по ним динамического анализа на ближайшую перспективу потребовал развития прогрессивных способов расчетов и услуг. Так, расширение спектра банковских услуг, повышения их качества происходит, в основном, за счет создания комплексной электронной платежной системы, развития межбанковских расчетных центров. В результате, если 10 лет назад, в 1995 году, доля электронных платежей через расчетно-кассовые центры Орловской области составляла менее 20%, то в 2005 году эта доля составила около 99% всех платежей.

Модернизация банковского бизнеса в настоящее время связана, прежде всего, с внедрением банкоматов и кредитных карт. Западные банки начали развивать это направление значительно раньше, чем российские. Российский рынок платежных пластиковых карт стал укрепляться лишь в последнее десятилетие. Такое запаздывание вызвало его быстрое развитие. Ежегодно объем операций по картам в России увеличивается почти троекратно, тогда как средний рост в мире составляет примерно 10-20%. [1]. Это обстоятельство требует постоянной корректировки учебных планов и программ подготовки специалистов финансовой сферы.

Курсы Финансовой математики и экономико-математических методов должны успевать за изменениями в отечественной экономике: рассматривать процессы, происходящие на финансовых рынках и методы их прогнозирования, моделировать современные системы страхования и инвестиционные процессы, рассчитывать доходы от финансового и оперативного лизинга, проводить оценку экономического эффекта от модернизации банковского бизнеса и др.

В Орловской региональной академии государственной службы (ОРАГС) для математических дисциплин выделяются часы на лабораторные работы, выполняемые на компьютерах с обязательным оформлением письменных отчетов. Лабораторные работы являются хорошим тренингом, в результате которого студенты не только знакомятся с методами расчетов различных финансовых операций, но и отрабатывают навыки решения практических задач из их будущей специальности с помощью современных программных средств.

Приведем примеры некоторых лабораторных работ, разработанных на кафедре математики и математических методов в управлении, представляющих интерес для подготовки специалистов финансовой сферы.

Модернизация банковского бизнеса в настоящее время связана, прежде всего, с внедрением банкоматов и кредитных карт. Однако без пропорционального развития сети предприятий торговли и сервиса невозможно добиться сбалансированного развития «карточных» проектов. Именно благодаря использованию кредитных карт преимущественно в качестве средств безналичного платежа достигается основная цель — увеличение сроков хранения денежных средств на карточных счетах, а значит, возможность их размещения в активы кредитными организациями.

Лабораторная работа «Исследование экономической эффективности банкоматов» позволяет проводить оценку экономической выгоды от внедрения банкоматов. Для этого рассматривается взаимосвязанный комплекс: банк, промышленное предприятие, пользующееся банкоматом, торговая точка с электронным терминалом. Составляется система уравнений баланса. В уравнениях следует учесть по возможности все поступления (со знаком «+») и отчисления (со знаком «-») средств при проведении финансовых операций. В качестве поступлений рекомендуется учитывать с некоторым коэффициентом и такой фактор, как повышение престижности предприятий торговли и сервиса при наличии электронного терминала, т.к. это является признаком определенного социального статуса. Необходимые данные для получения основных доходов и расходов вводятся в электронные таблицы Microsoft Excel.

Анализ полученной системы уравнений можно провести в среде Excel с помощью *Поиска решений* в меню *Сервис*, [2]. Для этого в электронных таблицах надо указать, какие из параметров следует изменять и в каких пределах. Программа автоматически находит оптимальные значения изменяемых параметров при равенстве нулю целевых функций, роль которых играют левые части уравнений баланса. Результаты расчетов дают значения изменяемых параметров, при которых выполняются уравнения баланса, т.е. для случая, когда доходы равны расходам.

Программа позволяет проводить дальнейшие исследования, задавая интересующие значения одних параметров и наблюдая изменения других. Например, при заключении договора с банком промышленное предприятие может согласиться или не согласиться с условиями договора, оценив выгодность его с помощью предлагаемой методики. В этой работе отрабатывается методика, с помощью которой можно существенно расширить диапазон исследований в банковской сфере.

Лабораторная работа «Динамика котировок ценных бумаг» посвящена анализу ценовых графиков и прогнозированию процессов на финансовых рынках.

В качестве исходного материала используются реальные данные, взятые из сообщений с финансовых рынков. Студенты анализируют графики методами технического анализа. Проводят выделение ценовых трендов, строят линии поддержки и линии сопротивления, отыскивают характерные фигуры разворота тренда, рассчитывают поведение осцилляторов и на основании полученных результатов определяют зоны перекупленности или перепроданности. Проводятся сравнения эффективности различных индексов, оценивается надежность составляемых прогнозов.

Лабораторная работа «Моделирование сезонных процессов» посвящена построению адаптивных моделей тренд-сезонных экономических явлений. Рассматриваются мультипликативные модели, в которых сезонная поправка вводится в виде множителя (коэффициент сезонности). Адаптивная мультипликативная модель Уинтерса представляет собой систему уравнений, связывающих расчетные значения исследуемого показателя с фактическим значением на предыдущем шаге с помощью некоторых коэффициентов. Среди них коэффициенты линейной модели и коэффициенты сезонности, которые рассчитываются на каждом шаге. Значения этих коэффи-

циентов на нулевом шаге находятся из линейной модели построенной по первым восьми уровням заданного ряда.

Важной частью работы является оценка адекватности построенной модели рассматриваемому процессу. Для этого проводятся исследования свойств: случайности остаточной компоненты по критерию пиков, нормальности распределения по R\S - критерию, отсутствия автокорреляции по d-критерию Дарбина-Уотсона, равенства нулю математического ожидания остаточной компоненты. Затем следует оценить точность построенной модели. Убедившись в адекватности модели и достаточной точности, строится прогноз. На графике отображаются фактические, расчетные и прогнозные данные.

Лабораторная работа «Применение EXPERT DECIDE 2.2 для решения задач экономики и управления» посвящена изучению условий применения разработанной в ОРАГС экспертной системы «EXPERT DECIDE 2.2» для принятия решений на основе анализа альтернатив [3]. Рассматриваемая система позволяет формировать мнение эксперта на основе результатов попарного сравнения различных качеств исследуемых объектов по девятибалльной шкале Т. Саати. Система может воспринимать как количественные, так и качественные (вербальные) суждения при оценках. Кроме того, система проверяет согласованность суждений, помогая тем самым эксперту корректировать свои суждения. Результаты представляются в виде схемы иерархии и набора диаграмм (гистограмм). Система позволяет также учитывать и обрабатывать мнение группы экспертов. Задание для экспертного анализа могут задаваться преподавателем, но лучше, если такие задания подбирают сами студенты.

Приглашаем всех желающих познакомиться с нашими разработками и получить подробные консультации.

**Литература**

1. Филонов А.Г. Расчеты финансовых потоков в офисной программной среде. «Наука и образование». Межвузовский сборник научных трудов, выпуск 1. Москва: ИИЦ МГУДТ. 2006г. стр 162-167.
2. Филонов А.Г., Дьяченко С.А. Практикум по экономико-математическим методам в управлении. Орел: Издательство ОРАГС, 2005 г.
3. Кузнецов А.И. Expert Decide для Windows 95, Windows 98, Windows NT. Версия 2.2. Руководство пользователя. Под редакцией В.Г. Шуметова. Орел: ОРАГС, 2000.

## АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ РЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

**И.И. Чернобровкина**
Орловский государственный университет, г. Орел

Как известно, модель множественной регрессии имеет вид

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t,1} + \beta_2 X_{t,2} + ... + \beta_n X_{t,n} + \varepsilon_t, \qquad \textbf{(1)}$$

где $Y_t$, $(t = 1,...,k)$ - значения объясняемой переменной, $X_{t,1}, X_{t,2},..., X_{t,n}$ - значения объясняющих переменных, $\beta_0, \beta_1, \beta_2,..., \beta_n$ – коэффициенты модели, $\varepsilon_t$ - ошибка измерения модели. Задача состоит в построении по данной выборке линейной модели зависимости объясняемой переменной от вектора объясняющих переменных.

При построении регрессионных моделей довольно редко используется анализ чувствительности. Качество построенных регрессионных моделей определяется рядом статистических показателей. Так, например, рассчитывается коэффициент детерминации, проверяется значимость коэффициентов при переменных, входящих в модель, рассчитывается ошибка прогноза.

Анализ моделей на чувствительность – это процесс, реализуемый после получения оптимального решения, который позволяет исследователю проанализировать влияние возможных изменений исходных условий на полученное ранее оптимальное решение. Применение анализа чувствительности дает некоторую гарантию того, что найденное оптимальное решение, т.е. построенная регрессионная модель, не устареет до своей реализации.

В общем случае, анализ чувствительности позволяет проследить за тем, как изменение значений входящих в модель переменных влияет на изменение значений моделируемой переменной. Таким образом, основываясь на результатах такого анализа, можно делать выводы об относительной важности входящих переменных для конкретной регрессионной модели и при необходимости удалить объясняющие переменные с низкими показателями чувствительности.

Анализ чувствительности вносит некоторую ясность в вопрос о полезности тех или иных переменных. Он позволяет выделить ключевые переменные, без которых анализ невозможен, и идентифицировать те, которые можно без ущерба исключить из рассмотрения. Тем не менее, существует ряд важных моментов, которые нужно принимать во внимание при использовании этой процедуры.

Как правило, при экономико-математическом моделировании строят несколько регрессионных моделей, а значит, имеет смысл выделить некоторые наиболее важные переменные, которые имеют высокий показатель чувствительности, может быть, во всех моделях. Также желательно определить переменные с низкой чувствительностью и переменные, с изменяющимся показателем чувствительности. Возможно, такие переменные несут в себе избыточную информацию.

Анализ чувствительности можно использовать не только для того, чтобы произвести удаление некоторых переменных, входящих в модель, но и с чисто информационными целями. По показателям чувствительности легко дать экономическую интерпретацию модели или выяснить, что, модель, может быть, по своим статистическим показателям хороша, но экономически интерпретируется неверно.

Приведем один из возможных способов применения анализа чувствительности к регрессионным моделям. Пусть имеется регрессионная модель вида (1), которая строилась по k наблюдениям (таблица 1).

Таблица 1.

| № наблюдения | $X_1$ | $X_2$ | … | $X_n$ | Y |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $a_{11}$ | $a_{12}$ | … | $a_{1n}$ | Y |
| 2 | $a_{21}$ | $a_{22}$ | … | $a_{2n}$ | Y |
| … | … | … | … | … | |
| K | $a_{k1}$ | $a_{k2}$ | … | $a_{kn}$ | Y |

Необходимо рассчитать показатель чувствительности переменной $X_1$. Следовательно, необходимо изменить значения этой входящей в модель переменной. Для этого сначала рассчитаем среднее значение $\overline{X_1}$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma(X_1)$. Далее построим интервал ($\overline{X_1} - m\sigma(X_1)$, $\overline{X_1} + m\sigma(X_1)$). Число среднеквадратических отклонений m может быть выбрано по усмотрению исследователя от 1 до 3. Длина построенного интервала равна $2m\sigma(X_1)$. Новые значения переменной $X_1$, которые будем представлять построенной модели, вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} &a_{11} = \overline{X_1} - m\sigma(X_1); \\ &a_{21} = a_{11} + h; \quad a_{31} = a_{21} + h; \\ &a_{k1} = a_{k-1,1} + h = \overline{X_1} + m\sigma(X_1), \end{aligned} \qquad \textbf{(2)}$$

где $h = \dfrac{2m\sigma}{k}$.

Значения остальных входящих в модель переменных, изменяться не будут. В этих условиях по построенной модели (1) рассчитываем значения переменной **Y**. Для этих новых значений вычисляем $\sigma(Y \mid X_1)$ - среднеквадратическое отклонение моделируемой переменной при изменении переменной $X_1$.

Чувствительность рассчитывается как отношение среднеквадратического отклонения выходного значения, соответствующего изменению входной переменной к среднеквадратическому отклонению этой переменной:

$$\nu_i = \frac{\sigma(y \mid X_i)}{\sigma(X_i)} \quad \textbf{(3)}$$

Таким образом, показатель чувствительности $\nu_1$ переменной $X_1$ вычислим по формуле

$$\nu_1 = \frac{\sigma(y \mid X_1)}{\sigma(X_1)} \quad \textbf{(4)}$$

Аналогичным образом, с использованием формулы (3), рассчитываются показатели чувствительности остальных переменных, входящих в регрессионную модель.

Ранжируя полученные показатели чувствительности в порядке возрастания (или убывания), можно сделать вывод о том, изменение какой переменной наибольшим образом влияет на моделируемую переменную. По необходимости, переменную с наименьшим показателем чувствительности можно удалить из модели.

Аналогичный способ проведения анализа чувствительности можно использовать в нейронно – сетевом моделировании.

Другой, более простой способ проведения анализа чувствительности регрессионной модели заключается в следующем. При построении модели вычисляют ее ошибку. Затем переменные $X_i$ по очереди заменяют их средними значениями и вычисляют соответствующие ошибки модели. Поскольку удаляется некоторая информация, которая использовалась при построении модели, то резонно ожидать некоторое ухудшение ошибки. Значение показателя чувствительности - это отношение ошибки с заменой переменной к исходной ошибке. Чем чувствительнее модель к выбранной переменной, тем большее ухудшение можно ожидать, и таким образом, тем больше это отношение. Если отношение меньше либо равно 1, то исключение переменной либо не влияет на производительность модели, либо улучшает ее.

Таким образом, применение анализа чувствительности к регрессионным моделям позволяет строить более точные модели, в большей степени адаптированы к изменению объясняющих переменных.

**Литература**

1. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. – М.: ЮНИТИ, 1998.
2. Боровиков В. STATISTICA: искусство анализа данных на компьютере. Для профессионалов.- Спб.: Питер, 2001.
3. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика. Начальный курс. М.: Дело, 2000.
4. Крамер Г. Математические методы статистики. М., Мир, 1975.

# ЭКСПЕРТНО-АНАЛИТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ РАЗВИТИЯ ПРОМЫШЛЕННОГО ПРЕДПРИЯТИЯ

**В.Г. Шуметов,**
Орловская региональная академия государственной службы, г. Орел
**Ф.Г. Милых, Г.В. Королев**
Орловский государственный технический университет, г. Орел

В современных условиях хозяйствования возрастает роль стратегического управления развитием предприятия, под которым понимается набор решений и действий по формулировке и реализации стратегии, предназначенной для достижения поставленных миссией целей. При этом важным этапом стратегического управления является стратегическое планирование, т.е. действия или шаги, которые предприятие предполагает предпринять для достижения стратегических целей.

Особенность стратегического планирования состоит в том, что оно представляет собой непрерывный циклический процесс, имеющий целью приведение возможностей предприятия в соответствие с условиями рынка [1]. С изменением внешних и внутренних условий должны уточняться цели и задачи развития предприятия, корректироваться стратегия и политика по достижению этих целей, что требует соответствующего методологического обеспечения.

Анализ известных методов стратегического планирования [2, 3] показывает, что наиболее формализованные из них относятся к классу портфельных моделей, предполагающих наличие у компании нескольких бизнес-единиц и товарных линий, логически дополняющих друг друга, при этом задачей стратегического планирования является формирование оптимального содержания хозяйственного портфеля фирмы. Менее формализованы стратегии роста, что затрудняет их использование широкими кругами менеджеров, более того, можно утверждать, что до настоящего времени отсутствует достаточно универсальная методология разработки стратегии развития предприятия, которая позволяла бы учитывать многообразие факторов неопределенности и риска, проводить их всестороннюю оценку.

В работах [4-12] показано, что для разработки стратегии развития более применимы модели, основанные на методе аналитических иерархий и экспертных знаниях. Метод аналитических иерархий позволяет не только получать суммарную оценку приоритетов конкурирующих стратегий по ряду критериев, но и проводить более детальный анализ путем введения в иерархическую модель дополнительных уровней – субъектов хозяйственной деятельности (акторов, по терминологии Т. Саати – автора метода [13]), их целей и политик [14, 15].

В докладе обосновывается методологический подход к планированию стратегии развития промышленного предприятия, основанный на экспертно-аналитическом моделировании и анализе полученных экспертных оценок распределения приоритетов конкурирующих стратегий, с учетом целей и политик субъектов хозяйственной деятельности. На конкретных примерах [16, 17] показаны возможности метода аналитических иерархий при планировании развития предприятий легкой промышленности.

В частности, показано, что с формальной точки зрения задача планирования развития промышленного предприятия аналогична планированию проецируемого и желаемого будущего, решение которой включает два процесса: планирование от достигнутого (прямой процесс) и планирование от конечного (желаемого) результата (обратный процесс).

Предварительной информацией, на основе которой проводится дальнейшая работа по прогнозированию, является сценарий. Различают два сценария общего типа: поисковый и предваряющий. Поисковые сценарии преследуют выявление тенденций альтер-

нативных вариантов будущего. Путем параметризации основных компонент изучаемой системы проводится проверка того, какие из событий являются логически необходимыми для достижения возможных вариантов будущего. Этот процесс осуществляется посредством вариации параметров и тщательной проверки гипотез развития, результатом чего является построение предельных сценариев и сценариев, которые выявляют тенденции, ограничивающие варианты возможного будущего. Поисковый сценарий применяется в качестве средства формирования воображения, стимуляции обсуждения и привлечения внимания лиц, принимающих решения, к определению возможных результатов.

Предваряющий сценарий связан с концептуализацией допустимых и желательных вариантов будущего. В отличие от поискового сценария, проецирующего настоящее в будущее, предваряющий сценарий идет обратным путем, начиная с будущего по направлению к настоящему, чтобы определить альтернативы и действия, необходимые для достижения этого будущего. В свою очередь, различают предваряющие сценарии двух видов: нормативный и контрастный сценарий. Первый определяет в плане множество заданных целей и пути их реализации, второй «приблизительно» описывает желаемое и достижимое будущее в пределах, определяемых предваряющим сценарием. Множество контрастных сценариев синтезируется в обобщенный сценарий, в котором каждый из них реализуется с определенной вероятностью.

Поскольку будущее определяется как результат воздействия различных сил или интересов (акторов), имеющих свои цели и политики, направленные на их достижение, они должны быть учтены при синтезе контрастных сценариев в обобщенный.

В работе [13] отмечаются следующие наиболее важные компоненты построения сценария.

1. Определение общей системы, внешних и внутренних ограничений, а также идентификация подсистем.

2. Построение иерархической структуры подсистем и идентификация регулирующих компонент.

3. Определение состояний системы и моделирование истории ее развития.

4. Рассмотрение развития сценария во времени (исторический анализ) для освещения эволюции системы и влияния на характеристики одновременно с исследованием внутренней динамики модели.

5. Определение целей сценария с обсуждением их значений.

6. Выбор типов используемых сценариев.

7. Разработка основных данных прошлой, настоящей и будущей информации.

8. Идентификация структурных компонент, факторов, обеспечивающих равновесие и тенденции развития системы.

9. Описание трений, присущих функциональным механизмам.

10. Анализ механизмов регулирования в системе и их связей.

11. Критика и пересмотр предыдущего анализа, усовершенствование сценария посредством проверки ограничений, неравновесности, трений, сил, противоречий, вмешательства механизмов регулирования, а также установление противодействий, которые влияют на выживание системы.

12. Создание усовершенствованного сценария.

Из приведенного перечня следует, что процесс построения обобщенного сценария является не только эвристической проблемой, но и сопровождается чисто техническими проблемами. Этот процесс позволяет формализовать и ускорить использование компьютерных экспертно-аналитических систем типа Expert Decide [19].

Так, в работе [17] предложена модель проецируемого будущего швейного предприятия, содержащая следующие уровни:

1) акторы, которые будут влиять на будущее предприятия (предполагается оценка их относительной важности);

2) политики и цели каждого важного актора, которые будут влиять на планирование (предполагается выполнить их относительную важность для каждого актора);

3) альтернативные сценарии будущего предприятия относительно политики акторов с оценкой относительной вероятности осуществления каждого сценария.

Соответствующая этой модели иерархия содержит уровни:

- цель (фокус) – проецируемое будущее швейного предприятия;
- акторы – руководство предприятия, руководство филиалов, служащие швейного предприятия, поставщики, потребители, конкуренты, местные власти, руководство отрасли, общество (местное население как социум);
- политики акторов – для руководства предприятия: успех предприятия, личный успех; для служащих предприятия: инициатива, направленная на материальный успех; для филиалов: развитие, карьера; для потребителей: повышение спроса; для поставщиков: сдвиг в сторону выпуска другой продукции; для конкурентов: завоевание рынка; для местных властей: контроль над обеспечением занятости населения; для руководства отрасли: внедрение инноваций; для общества: патриотизм;
- сценарии – сохранение статус-кво; развитие производства, ориентированного на внутренний рынок; ориентация на зарубежные заказы; банкротство.

В результате опроса экспертов и обработки их результатов с помощью экспертно-аналитической системы Expert Decide были оценены итоговые приоритеты поисковых сценариев развития швейного предприятия: с вероятностью 0,485 при сохранении существующих политик акторов предприятие будет ориентироваться на зарубежные заказы, вероятность развития производства, ориентированного на внутренний рынок, составляет 0,295, сохранение существующего положения имеет вероятность 0,169, и лишь один шанс против 20 за то, что предприятие обанкротится.

Однако ясно, что данный прогноз требует определенных действий акторов для реализации желательного варианта развития событий. С этой целью выполнено сравнение этих итоговых приоритеты с приоритетами сценариев развития, рассчитанных исходя из интересов и политик только швейного предприятия. При этом получены соотношения приоритетов сценариев развития ситуации, рассчитанные исходя из целей и политик всех акторов, с одной стороны, и основных акторов, с другой, а также значения прироста вероятности сценария при сохранении политик акторов: сценарий «статус-кво» имеет отношение приоритетов 115%, т.е. относительный прирост вероятности данного сценария при сохранении политик всех акторов составляет 15% и требуются дополнительные усилия со стороны основных акторов для *снижения вероятности* осуществления этого сценария. Сценарий «зарубежные заказы» имеет отношение приоритетов 92%, т.е. относительный прирост вероятности данного сценария при сохранении политик всех акторов составляет –8 %, имеет место «дефицит» осуществления этого сценария и требуются дополнительные усилия со стороны основных акторов для *повышения вероятности* его осуществления. Таким образом, рассчитанные величины можно интерпретировать как *индикаторы политик* акторов, заинтересованных в повышении вероятности реализации желаемых сценариев развития рынка.

Полученные результаты дополняет оценка последствий от принятия наиболее вероятных сценариев и оценка обобщенного сценария. Исходя из достаточно малого значения обобщенного веса для всех критериев (–1,144 при шкале от –8 до +8), сделан вывод о незначительном изменении переменных состояния в будущем, и по этой причине обратной процесс планирования было решено не проводить. Однако, следует заметить, что в общем случае, помимо прямого процесса планирования, необходимо проводить процесс обратного процесса планирования. Методология этой процедуры, применительно к корпорациям, детально изложена в [13]; в [14] представлена методика измерения сходимости второго прямого процесса с желаемым будущим, а также методика оценки эффективности добавления новых политик на этапе второго прямого процесса.

Следует также отметить, что в общем случае оба процесса планирования – прямой и обратный – используются последовательно и на практике может быть реализовано несколько итераций, когда эффективность изменения целей или новые линии поведения проверяется с тем, чтобы убедиться, насколько результаты в будущем близки к желаемым. В результате процесс с двухточечным граничным значением приходит к искомому сближению возможного и желаемого будущего.

В докладе показано, что помимо основного результата метода экспертно-аналитического моделирования – количественных оценок приоритетов конкурирующих стратегий с учетом основных внутренних факторов и внешних условий, появляется возможность анализа так называемых матриц «результатов» [18], представляющих собой экспертные оценки эффективностей и неиспользованных возможностей, отвечающих всем возможным сочетаниям стратегий и условий их реализации. К этим матрицам применимы разнообразные критерии оптимальности (Лапласа, максимакса, Вальда, Сэвиджа и др.), что позволяет формализовать процесс принятия стратегического управленческого решения.

В докладе также обсуждаются методические аспекты отдельных этапов стратегического планирования развития предприятия.

**Литература**

1. Камаев В.Д. Экономика и бизнес. М.: Изд-во МВТУ, 1993.
2. Любанова Т.П., Мясоедова Л.В., Олейникова Ю.А. Стратегическое планирование на предприятии: Учебное пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ИКЦ «МарТ»; Ростов н/Д.: Издательский центр «МарТ», 2005.
3. Ляско В.И. Стратегическое планирование развития предприятия: Учебное пособие для вузов. М.: Изд-во «Экзамен», 2005.
4. Теория и практика принятия решений в экономике и управлении экспертными методами / В.А. Иванов, В.Г. Шуметов, Ф.Г. Милых и др. М.: МГУДТ, 2003.
5. Модели и механизмы управления развитием хозяйственных систем на основе экспертной информации / А.Ф. Мартынов, Ф.Г. Милых, А.А. Свалов, В.Г. Шуметов. Орел: ОГАУ, 2003.
6. Шуметов В.Г., Милых Ф.Г., Свалов А.А. Экспертные методы и компьютерные технологии в информационном обеспечении управления стратегией производственного предприятия // Компьютерные технологии в управлении, при моделировании и в экономике. Сб. науч. трудов. Харьков: ХАИ, 2003.
7. Милых Ф.Г., Шуметов В.Г., Гудов В.А. Измерение и управление хозяйственными рисками промышленного предприятия: методологические подходы // Компьютерные технологии при моделировании в управлении и экономике. Сб. науч. трудов XIV Межд. конф. «Новые технологии в машиностроении». Кн.1. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2004.
8. Королев Г.В., Милых Ф.Г., Долгов В.В. Применение метода анализа иерархий для оценки уровня хозяйственного риска // Компьютерные технологии при моделировании в управлении и экономике. Сб. науч. трудов XIV Межд. конф. «Новые технологии в машиностроении». Кн.1. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2004.
9. Королев Г.В., Милых Ф.Г., Шуметов В.Г. Экспертно-аналитические технологии в оценке риска экономической несостоятельности промышленного предприятия // Компьютерные технологии при моделировании в управлении и экономике. Сб. науч. трудов XIV Межд. конф. «Новые технологии в машиностроении». Кн.1. Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2004.
10. Милых Ф.Г., Королев Г.В., Шуметов В.Г. Анализ приоритетных направлений деятельности по управлению риском экономической безопасности промышленного пред-

приятия в условиях неопределенности // Компьютерные технологии при моделировании, в управлении и экономике. Сб. науч. трудов. Кн.1. Харьков: ХАИ, 2005.
11. Милых Ф.Г., Королев Г.В. Управление риском экономической несостоятельности швейного предприятия с применением компьютерных технологий // Компьютерные технологии при моделировании, в управлении и экономике. Сб. науч. трудов. Кн.1. Харьков: ХАИ, 2005.
12. Королев Г.В., Милых Ф.Г., Шуметов В.Г. Экспертно-аналитические технологии в оценке риска экономической несостоятельности промышленного предприятия // Компьютерные технологии при моделировании, в управлении и экономике. Сб. науч. трудов. Кн.2. Харьков: ХАИ, 2005.
13. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993.
14. Андрейчиков А.В., Андрейчикова О.Н. Анализ, синтез, планирование решений в экономике. М.: Финансы и статистика, 2001.
15. Шуметов В.Г. Управление инновационным процессом в хозяйственной системе на основе современных информационных технологий. Монография / Под общ. ред. А.Ю. Егорова. М.: Изд-во «Палеотип», 2004.
16. Милых Ф.Г., Болотских Д.И., Барбашова Е.В. Методология планирования развития предприятий легкой промышленности на основе экспертно-аналитических методов // Системная модель российского общества XXI века и корректировка реформ (Общество, которое мы выбираем). Мат. межд. н.-практ. Интернет-конф. Орел: ОрелГТУ, 2003. С.123-126.
17. Милых Ф.Г. Формирование стратегии промышленного предприятия с использованием экспертно-аналитических технологий: Дис. … к-та экон. наук. Орел: ОрелГТУ, 2003.
18. Спицнадель В.Н. Теория и практика принятия оптимальных решений. Учеб. пособие. СПб.: Изд. дом «Бизнес-пресса», 2002.
19. Кузнецов А.И., Шуметов В.Г. Expert Decide для Windows 95, 98, NT, 2000, Me. Версия 2.2. Руководство пользователя. Орел: ОРАГС, 2001.

## КОГНИТИВНЫЕ МОДЕЛИ В ИССЛЕДОВАНИИ СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

**В.Г. Шуметов,**
Орловская региональная академия государственной службы, г. Орел
**А.А. Свалов,**
Орловский государственный технический университет , г. Орел
**А.В. Малявина**
Российская экономическая академия им. Г.В. Плеханова, г. Москва

Важной практической задачей как на микро-, так и на макроуровне является прогнозирование тенденции развития социально-экономических процессов. Применение для этой цели развитого аппарата анализа временных рядов в большинстве случаев невозможно. Это особенно относится к нынешнему переходному этапу развития российской экономики, когда исследователи располагают лишь короткими временными рядами макроэкономических индикаторов – если говорить об экономике страны в целом, либо информативных показателей хозяйственной деятельности – на уровне отраслей, предприятий. Такая ситуация обусловливает необходимость обращаться к иным методам прогнозирования, основанным на не столь «жестких» математических моделях [1].

Эффективным средством изучения социально-экономических систем является моделирование – процесс разработки модели. Как известно, под моделью понимается аналог, «заместитель» фрагмента действительности, который при определенных услови-

ях воспроизводит интересующие исследователя свойства оригинала при конкретной постановке задачи. Разработка модели является первым этапом системного подхода, который предполагает также исследование модели и ее применение для целей управления.

Классификации моделей существенно различаются даже в пределах одной науки и во многом зависят от склонности исследователей. Приведем схему классификации, которая, в определенной мере, объединяет два различных подхода к моделированию – естественнонаучный и гуманитарный [2]. В гуманитарной сфере чаще всего используются содержательные модели, формулируемые на естественном языке, в то время как в естественнонаучной среде под моделированием подразумевают разработку математических моделей. В любом случае на верхнем иерархическом уровне следует рассматривать когнитивную модель (рис. 1).

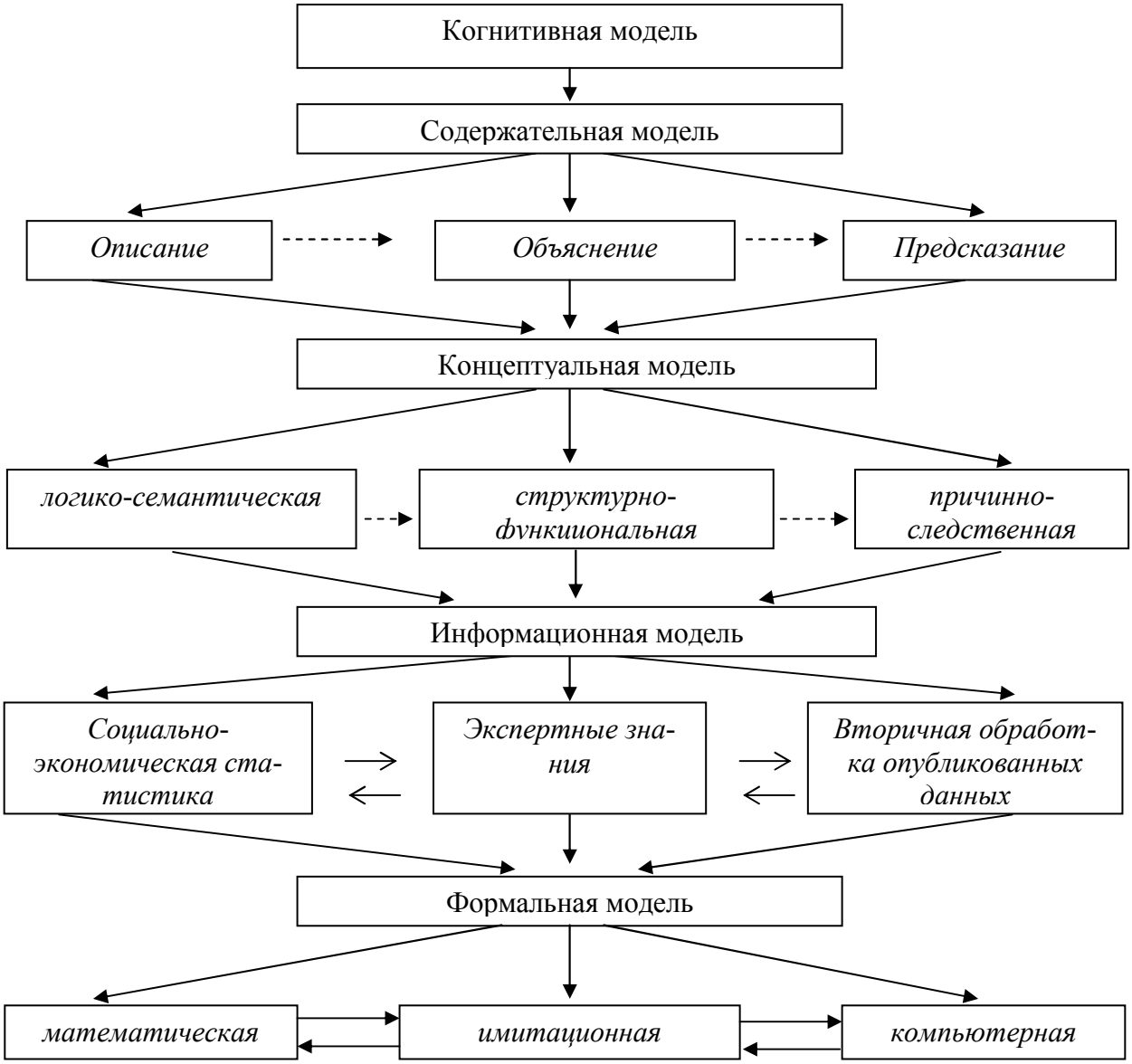



Рис. 1. Иерархия моделей

На схеме сплошными направленными линиями показаны связи, идущие от моделей верхних уровней к моделям, расположенным ниже, но фактически процесс моделирования является итеративным, и связи могут быть также ориентированы в обратном направлении. Горизонтальными пунктирными линиями со стрелками обозначена преимущественная последовательность моделирования:

1) по функциям – от описания к объяснению и, далее, предсказанию;

2) по видам концептуальных моделей – от логико-семантических к структурно-функциональным и причинно-следственным.

Горизонтальные стрелки, направленные в обе стороны от источников информации для разработки информационных моделей, а также от видов формальных моделей, отражают необходимость, в первом случае, параллельного использования разных информационных источников, во втором – возможность представления формальных моделей, в зависимости от постановки задачи, в трех формах: математической, имитационной, компьютерной.

Из перечисленных видов моделей следует выделить когнитивные модели, в которых «используются теоретические концепции и конструкты данной предметной области знания» [3, с.91]. Формируя когнитивную модель объекта (в широком понимании категории «объект»), исследователь стремится ответить на конкретные, интересующие его вопросы, поэтому она отражает лишь определенную сторону явления, процесса. Когнитивная модель отражает особенности восприятия им моделируемого явления и, тем самым, является субъективным отражением социальной действительности в понимании исследователя, включая его установки и цели, парадигмы и перспективы, которых он придерживается.

Рассмотрим сущность когнитивных моделей и те возможности, которые они предоставляют исследователю, на примере модели анализа проблемы потребления электроэнергии в регионе, предложенной Ф. Робертсом [4] и воспроизводимой нами по источникам [3, 5]. Ф. Робертс данную проблему описывает следующими основными факторами:

1) потребление энергии *U*;

2) стоимость электроэнергии *R*;

3) энергетические мощности *C*;

4) число предприятий *F*;

5) число рабочих мест *G*;

6) численность населения *E*;

7) состояние окружающей среды *Q*.

На первый взгляд, первый из них – потребление энергии *U* – является результативным, остальные шесть – факторными. Однако связь между ними более сложная и в рамках когнитивного подхода соответствующая модель может быть представлена в виде следующего знакового ориентированного графа (рис. 2).

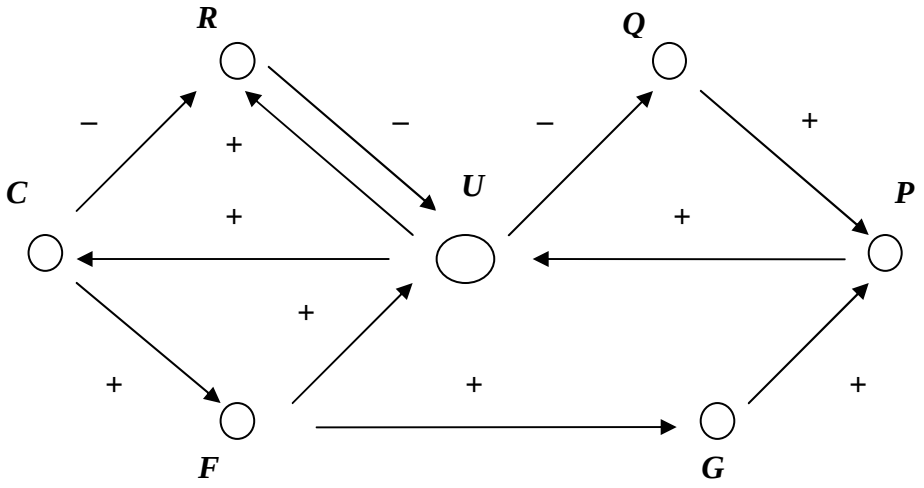



Рис. 2. Когнитивная модель анализа проблемы потребления электроэнергии

Поясним элементы графа. Дугами на рис. 2 отмечены существенные причинно-следственные отношения между факторами – вершинами *U*, *R*, *C*, *F*, *G*, *P*, *Q*. Направлен-

ность дуги отвечает отношениям между вершинами графа – от причины к следствию. Так, дуга *FU* направлена от вершины *F* – число предприятий в регионе (причина) – к вершине *U* – потребление энергии (следствие).

Знак «+» у дуги графа означает согласование знаков приращений значений характеристик, отображаемых вершинами: если фактор исходящей вершины количественно растет, то соответственно увеличивается и значение фактора входящей вершины. Так, при увеличении числа предприятий в регионе потребление энергии растет. И, напротив, знак «–» у дуги графа отражает несогласование знаков приращения факторов: при росте потребления энергии состояние окружающей среды ухудшается.

Связи между факторами могут быть и разнонаправленными. Так, потребление энергии вызывает увеличение ее стоимости, с одной стороны (дуга *UR* со знаком «+»), с другой стороны, рост стоимости электроэнергии обусловливает снижение ее потребления (дуга *RU* со знаком «–»).

Дальнейший анализ когнитивной модели сводится к выделению так называемых контуров. Под контуром понимается замкнутый путь, в котором ни одна из вершин не встречается дважды. Таковы, например, контуры *RUR*, *PUQP*, *UCFU*.

Наличие контура свидетельствует о наличии обратной связи в моделируемом процессе. В зависимости от сочетания и числа знаков дуг каждый контур может либо усиливать, либо ослаблять воздействие других факторов. Так, в контуре *UCFU* все дуги со знаком «+», и легко показать, что увеличение (уменьшение) любого фактора в этом контуре будет усилено.

Иная картина взаимодействия факторов в контуре *PUQP*. Предположим, что численность населения в регионе возросла. Это приведет к увеличению потребления электроэнергии, следовательно, состояние окружающей среды ухудшится, а это, в свою очередь, приведет к уменьшению численности населения. Таким образом, влияние «импульса» в вершине *P* будет компенсироваться действием контура *PUQP* и поведение системы стабилизируется. По аналогии с кибернетической схемой управления первый контур – *UCFU* – будет контуром положительной обратной связи, второй – *PUQP* – контуром отрицательной обратной связи. В работе [6] показано, что контур усиливает отклонение тогда и только тогда, когда он содержит четное число отрицательных дуг или не содержит их вообще.

До сих пор мы говорили о качественном анализе когнитивной модели. Больше возможностей появляется в случае использования для этой цели программно-аналитического комплекса (ПАК) «Прогноз», разработанного специалистами Российской Академии Государственной Службы (РАГС). В цитированном нами ранее издании [5] описывается алгоритм, заложенный в его основу. В когнитивную модель дополнительно вводятся такие параметры, как веса, отражающие интенсивности воздействия одних факторов на другие, импульсы, отражающие приращение соответствующих характеристик за единицу времени, а также временной фактор. Эти параметры подчиняются следующим формализованным правилам:

1) изменения значений характеристик происходят только в дискретные моменты времени $t$, $t = 0, 1, 2, \ldots$;

2) возникший в $j$-й вершине импульс $P_j(t)$ в момент времени $t$ передается за единицу времени и только в смежные вершины, т.е. появляется в них в момент $t + 1$. По дугам передаются только импульсы, но не полные значения характеристик;

3) импульс $P_j(t)$ в $j$-й вершине передается в смежные вершины с коэффициентом усиления, равным весу дуг;

4) импульсы, одновременно пришедшие в $j$-ю вершину, складываются с учетом знаков.

Тем самым становится возможным осуществлять прогноз на один, два и т.д. шагов. Имеется возможность задавать любое начальное возмущение, что позволяет «проиг-

рывать» различные управленческие ситуации. Наконец, можно проверить устойчивость моделируемого процесса (увеличив число шагов до бесконечности), а в случае его неустойчивости подобрать значения параметров, при которых процесс не будет выходит за заданные пределы.

В работе [5] приведены примеры, иллюстрирующие указанные возможности. Один из них относится к выработке стратегических решений по стабилизации процессов развития жилищно-коммунального хозяйства малого города, два других – к когнитивному моделированию социально-трудовой сферы и планированию социально-экономического развития муниципального образования. В работе [3] описаны когнитивные модели, отражающие процесс развития социополитической системы, а также марксистскую модель революции.

Из вышеизложенного можно заключить, что когнитивное моделирование, в сочетании с поддерживающими его компьютерными технологиями, является мощным инструментом исследователя в случаях анализа и прогнозирования слабоформализуемых процессов. В настоящее время в Орловской региональной академии государственной службы проводятся работы по модификации алгоритма когнитивного моделирования в направлении определения весов связей с помощью экспертно-аналитических технологий, основанных на методе анализа иерархий [7] и поддерживаемых соответствующими программными продуктами [8].

**Литература**

1. Арнольд В.И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2000.
2. Шуметов В.Г. Управление инновационным процессом в хозяйственной системе на основе современных информационных технологий. Монография / Под общ. ред. А.Ю. Егорова. М.: Изд-во «Палеотип», 2004.
3. Плотинский Ю.М. Модели социальных процессов: Учеб. пособ. для вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М.: Логос, 2001.
4. Робертс Ф.С. Дискретные математические модели с приложениями к социальным, биологическим и экологическим задачам. М., 1986.
5. Федулов Ю.Г., Юсов А.Б., Матвеев А.А. Исследование социально-экономических и политических процессов с помощью когнитивных моделей: Учебно-метод. пособие. М.: Изд-во РАГС, 2004.
6. Maruyama M. The Second Cybernetics: Deviation-Amplifing Mutual Causas Processes // Amer. Scientist. 1963. V.51. P.164-179.
7. Саати Т. Принятие решений. Метод анализа иерархий. М.: Радио и связь, 1993.
8. Кузнецов А.И., Шуметов В.Г. Expert Decide для Windows 95, 98, NT, 2000, Me. Версия 2.2. Руководство пользователя. Орел: ОРАГС, 2001.

# Содержание

**Список участников (секции 4–6)** **5**

**4. Математическое моделирование в гидродинамике и физике**

**А.А. Аксюхин.** О новом численном методе решения двумерных фильтрационных задач о дебите скважины. ..... **9**

**М.А. Аматов, И.А. Клименко, Н.А. Чеканов.** Спектр и собственные функции гамильтониана асимметричного волчка. ..... **13**

**М.А. Барг, Ю.Х. Поландов.** Особенности моделирования процесса горения методом крупных частиц. ..... **17**

**И.Н. Беляева, А.Н. Макаренко, Н.А. Чеканов.** Классическая динамика и квантовые характеристики двумерной $C_{2v}$ инвариантной гамильтоновой системы. **21**

**И.В. Бурылова, Е.А. Полякова, М.А. Степович.** Об одном методе математического моделирования явлений тепломассопереноса в трехслойной структуре. **26**

**Г.В. Голубев** К задаче определения фильтрационных параметров в неоднородном трещиновато-пористом пласте. ..... **29**

**Е.С. Каменецкий, С.Р. Тедеева, В.Н. Хетагуров.** Совершенствование модели быстрого движения сыпучего материала. ..... **36**

**Д.Н. Никольский.** Параллельное моделирование двумерной задачи эволюции границы раздела жидкостей. ..... **39**

**Д.Н. Никольский, Т.А. Никольская, Ю.С. Федяев.** Сопоставление методов нанесения потенциалов двойного и вихревого слоев при решении эволюционных задач. ..... **47**

**В.Ф. Пивень.** Разрешимость интегральных уравнений второго рода типа Фредгольма для граничных задач фильтрации. ..... **56**

**А.А. Потапов.** Фракталы, детерминированный хаос и скейлинг в современных методах физико-математических наук. ..... **61**

**Н.В. Севостьянова, А.Я. Шпилевой.** Решения задач теории фильтрации, выраженные через тэта-функцию Якоби для областей с границами в виде прямоугольника и равностороннего треугольника. ..... **67**

**Л.И Сербина.** Математическое моделирование движения влаги в средах с фрактальной структурой. ..... **70**

**В.В. Флоринский, Н.А. Чеканов.** Полуклассический спектр уравнения Дюффинга. ..... **71**

**Д.Е. Шестерин.** Математическое моделирование продвижения границы раздела разноцветных жидкостей вблизи бассейна в кусочно-анизотропном грунте. ..... **74**

**5. Физическая кинетика и механика дисперсных систем**

**А.Т. Ахметов, М.В. Мавлетов, А.Г. Телин, С.П. Саметов.** Течение высоконцентрированных обратных эмульсий в микроканалах. ..... **79**

**А.Т. Ахметов, А.А. Рахимов, А.К. Ахметов.** Динамическое запирание обратной водонефтяной дисперсии при радиально-расширяющемся течении в ячейке Хили-Шоу. ..... **83**

**С.Н. Дьяконов.** К вопросу о движении капель с жидкими включениями в неоднородных вязких средах. ..... **89**

**С.Н. Дьяконов.** К общему решению однородного уравнения Озеена. ..... **101**

**С.Н. Дьяконов, Б.В. Рюмшин.** Анализ динамических параметров в задаче о дрейфе летучей составной капли в неоднородной бинарной газовой смеси. ..... **112**

**О.С. Копылова.** Особенности движения взаимодействующих капель магнитной жидкости в переменном магнитном поле. ..... **114**

**М.К. Кузьмин.** К исследованию нестационарной составляющей термофоретической скорости твердой аэрозольной частицы. ..... **118**

**М.К. Кузьмин, Ю.И. Яламов.** К анализу формул для определения скорости нестационарного термофореза сферической частицы. ..... **122**

**Н.Н. Любимова.** Распределение массовой скорости и функции распределения ферми-газа в задаче о тепловом скольжении. ..... **127**

**Н.В. Малай, К.С. Рязанов.** О некоторых особенностях математического описания взвешенных нагретых частиц в неизотермических вязких газообразных и жидких средах. ..... **131**

**Н.В. Малай, А.А. Стукалов.** Использование метода сращиваемых асимптотических разложений в задаче о фотофоретическом движении нагретой твердой аэрозольной частицы сферической формы. ..... **136**

**О.И. Марков.** Расчет характеристик носителей тока в сплавах $(Bi_{0.88}Sb_{0.12})_{1-x}Te_x$. **140**

**А.А. Плесканев, Н.В. Малай.** К вопросу о термо- и фотоофоретическом движении твердой нагретой аэрозольной частицы сфероидальной формы. ..... **145**

**А.Я. Симоновский, М.А. Кобозев.** Влияние однородного магнитного поля на процессы парообразования при кипении магнитной жидкости. ..... **149**

**А.Я. Симоновский, Е.П. Ярцева.** К вопросу о капиллярных явлениях в жидких дисперсных намагничивающихся системах. ..... **151**

**6. Математические методы в экономике**

**Д.Н. Качевский.** Динамическая модель стабильного производства. ..... **156**

**К.Б. Нуртазина.** Методы построения множества эффективных портфелей. .... **160**

**С.П. Строев.** Экспертный метод оценки эффективности затрат на управление риском. ..... **162**

**Г.А. Хакимова.** Математическая модель инвестиций в обезличенные металлические счета. ..... **165**

**М.В. Верижников.** Моделирование предприятия-заемщика на основе обобщенно-ресурсного подхода. ..... **168**

**В.В. Давнис, В.И. Тинякова.** Предельный анализ факторов риск-ожидаемых ситуаций. ..... **172**

**А.А. Дельгашева.** Анализ деятельности центра электронного обучения специалистов в нефтяной промышленности с использованием логики предикатов. ..... **176**

**Л.Н. Зубкова.** Оценка финансового состояния предприятия с использованием моделей нечеткой математики. ..... **181**

**А.М. Краснов.** Экспертный метод прогнозирования потока платежей в ходе риск-анализа инвестиционного проекта. ..... **186**

**А.В. Морозова.** Определение тесноты связи между ранжированными признаками-компонентами социально-профессиональной конкурентоспособности специалистов. ..... **190**

**Т.Е. Никитина.** Математические методы в типологии регионов по комплексу показателей рынка образовательных услуг. ..... **195**

**В.А. Перепелица, Е.В. Попова, А.М. Янгишиева.** О прогнозировании риск-экстремальных уровней временного ряда на базе методов нечетких множеств и клеточных автоматов. ..... **201**

**Т.Н. Русских.** Модель определения региональных нормативов стоимости лечения в стационаре на основе иерархических нечетких баз знаний. ..... **206**

**А.Б. Секерин.** Оптимизация уровня риска в ходе принятия инвестиционных решений. ..... **210**

**А.Г. Филонов, Г.Н. Абрамова, А.Ф. Плеханов.** Использование офисной программной среды в преподавании экономико-математических дисциплин. ..... **212**

**И.И. Чернобровкина.** Анализ чувствительности регрессионных моделей. ..... **214**

**В.Г. Шуметов, Ф.Г. Милых, Г.В. Королев.** Экспертно-аналитические модели планирования развития промышленного предприятия. ..... **217**

**В.Г. Шуметов, А.А. Свалов, А.В. Малявина.** Когнитивные модели в исследовании социально-экономических процессов. ..... **221**

# Современные методы физико-математических наук

## Труды международной конференции 9 – 14 октября 2006 г., Орел

**Том 2**

**Редактор Юрий Сергеевич Федяев**

Оригинал-макет создан при помощи системы LaTeX $2_\varepsilon$
Компьютерная верстка: Ю.С. Федяев

Подписано в печать 24.08.2006 г. Формат 60×80 1/8
Печать ризография. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Объем 28,75 усл. печ. л. Тираж 100 экз. Заказ №493 от 25.08.06

Редакционно-издательский отдел
ГОУ ВПО «Орловский государственный университет»
302026, г. Орел, ул. Комсомольская, 95

Лицензия ПД №8-0023 от 25.09.2000 г.
Отпечатано с готового оригинал-макета
в ООО Полиграфическая фирма «Картуш»
г. Орел, ул. Васильевская, 138. Тел./факс (4862)741152