Механика

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уважаемый читатель. Предлагаемое Вашему вниманию издание представляет собой первую часть методического пособия для подготовки к сдаче единого государственного экзамена и участию в олимпиадах различного уровня по физике.

Пособие содержит краткое изложение курса физики средней школы с примерами и разбором типовых задач, при подборе которых использовались варианты единого государственного экзамена, размещенные на сайте федерального института педагогических измерений (www.fipi.ru), а также задачи школьных олимпиад и вступительных экзаменов различных вузов страны.

При решении задач можно рекомендовать следующий порядок действий:

1. *Краткая запись условия задачи в символической форме, где все величины должны быть выражены в определенной системе единиц, если не оговорено в какой конкретно, то, при отсутствии особых причин, в СИ.*

   Данный этап не является обязательным требованием критерия оценки выполнения заданий ЭГЭ ([2, стр. 13] прилагаемого ниже списка литературы), тем не менее его наличие способствует успешному решению, т.к. позволяет осознать словесное описание и перевести его на язык физических символов.

2. *Детальный анализ рассматриваемого в задаче явления, запись соответствующих физических законов и выполнение поясняющих рисунков с указанием всех необходимых величин.*

   Отсутствие указанного этапа сводит процесс решения к формальному использованию формул, зачастую не имеющих ни малейшего отношения к заданию.

3. *При наличии векторных соотношений, их необходимо привести в скалярную форму.*

   Успех этого этапа зависит от того, насколько удачно будет выбрана система отсчета.

4. *Проанализировать полученные в результате выше перечисленных действий уравнения на предмет значимости учитываемых*

явлений и возможности упрощения (очевидно, например, что в задаче вычисления времени падения металлического шарика в воздухе действием выталкивающей силы можно пренебречь). Убедившись, что их число равно количеству неизвестных, приступить к решению.

Допускается любой подход: подчас вычисление по частям может оказаться более рациональным, чем вывод общей формулы. Тем не менее, желательно, если это не приводит к неоправдано громоздким выражениям, найти результат в общем виде, что позволяет избежать лишних вычислений и накопления ошибок округления. Запись каких-либо комментариев также необязательна. Однако, следует учитывать, что проверяющие – тоже люди и заставлять их решать ребус по угадыванию хода мыслей экзаменуемого не только не этично, но и опасно, поскольку не уловив логики рассуждений эксперт может признать решение ошибочным и снизить оценку. Позже, на апелляции Вы, быть может, докажете свою правоту и Вам добавят балл, но к итоговой оценке, которая (если не изменятся правила) все равно окажется ниже, чем в случае, когда этот балл был бы учтен как «первичный».

5. *Подставив числовые значения в выбранной системе единиц, привести ответ в виде числа с наименованием.*

   К этому этапу следует относиться с особым вниманием: обидно, решив сложную задачу, потерять балл по невнимательности. В данном случае апелляция не поможет.

6. *Ответ полезно проанализировать с точки зрения соответствия реальности и физического смысла.*

   Например, если в процессе решения скорость движения электрона оказалась равной $3{\cdot}10^8$ м/с, то этот результат следует признать ошибочным. Выполнение проверки размерности также необязательно, но желательно, поскольку поможет убедиться в наличии ошибки.

7. *В случае, если, в силу недостатка времени или возникших трудностей, окончательного результата получить не удается, решение все равно необходимо записать на бланк ответа.*

   Это позволит получить за нее хотя бы часть баллов.

Подводя итог сказанному, необходимо еще раз подчеркнуть, что данное пособие не претендует на полноту рассмотрения физических явлений. В нем представлено лишь краткое изложение наиболее важных, с точки зрения автора, вопросов, необходимых при решении задач. Не следует надеяться, что Вам удастся освоить весь курс физики ограничившись только этим материалом. Для систематического изучения в первую очередь необходимо пользоваться учебником, рекомендованным школьным учителем.

В качестве дополнительной литературы можно предложить:

1. Большой справочник школьника. 5–11 классы. – М.: Дрофа, 2001.

2. ЕГЭ 2009. Физика. Федеральный банк экзаменационных материалов. /Авт.-сост. М.Ю.Демидова, И.И.Нурминский. – М.: Эксмо, 2008.

3. Кабардин О.Ф. Физика: справочные материалы. – М.: Просвещение, 1991.

4. Справочник по физике. Яворский Б.М., Детлаф А.А. – М.: Физматлит, 1996.

5. Элементарный учебник физики в трех томах под ред. Г.С.Лансберга (любой год издания).

Доктор физико-математических наук
профессор кафедры теоретической и математического моделирования
Орловского государственного университета
Савков Сергей Анатольевич

ВВЕДЕНИЕ

Механика – *раздел физики, изучающий механическое движение тел.*

Механическим движением *тела называют изменение его положения относительно других тел с течением времени.*

Движение тела, при котором любая связанная с ним прямая перемещается параллельно самой себе, называют **поступательным**.

Движение, при котором все точки тела, двигаясь в параллельных плоскостях, описывают окружности, плоскости которых перпендикулярны некоторой прямой, а центры лежат на этой прямой, называют **вращательным** *а саму прямую* – **осью вращения**.

Следует учитывать, что все происходящие в природе процессы чрезвычайно сложны, поэтому вместо реально существующих тел или явлений рассматривают *фиктивные* (*не существующие в действительности*) *тела или явления, но сохраняющие наиболее важные их свойства.*

Такие тела или явления *называют* **моделью**.

Так, при изучении механического движения тела, как правило, можно пренебречь изменением его формы или, что эквивалентно, изменением расстояний между его частями.

Тело, расстояние между точками которого не изменяется с течением времени, называют **абсолютно твердым**.

Примерами абсолютно твердого тела могут служить геометрические фигуры, которые для доказательства теорем переносят с одного места на другое. Таким образом, геометрия Евклида – геометрия абсолютно твердых тел.

В подавляющем большинстве процессов оказываются несущественными форма и размеры тела.

Тело, размерами и формой которого в рассматриваемом процессе можно пренебречь, называют **материальной точкой**.

Замечание. Это понятие применимо лишь в случае, когда размеры тела малы по сравнению с размерами задачи, и при условии, что в изучаемом явлении можно пренебречь вращательным движением этого тела.

Например, при изучении движения океанского лайнера из пункта отправления в пункт назначения его можно рассматривать как материальную точку. А с точки зрения пассажира этого лайнера – нельзя. Нельзя также считать материальной точкой шарик, скатывающийся со сколь угодно длинного желоба, а шайбу, соскальзывающую с наклонной плоскости, при соответствующем соотношении размеров – можно.

Термин «материальная» подчеркивает отличие такого объекта от геометрической точки, не обладающей конкретными физическими свойствами.

В соответствии с характером решаемых задач механику разделяют на кинематику, динамику и статику.

Вопросы для самоконтроля.

1. Какое движение называют: механическим, поступательным, вращательным? Приведите примеры перечисленных видов движения.

2. Какое тело называют абсолютно твердым? Приведите примеры явлений, при рассмотрении которых тело можно или нельзя рассматривать как абсолютно твердое.

3. Что называют материальной точкой? Приведите примеры явлений, при которых тело можно или нельзя рассматривать как материальную точку.

I. Кинематика

Кинематика *изучает механическое движение, не рассматривая причины его вызывающие.*

Как правило, при кинематическом описании размерами тела можно пренебречь и, если не оговорено обратное, рассматривать его как материальную точку.

§ 1. Основные понятия кинематики материальной точки

Указать положения тела или любой его точки в пространстве можно только по отношению к другим телам.

Тело, относительно которого определяется положение других тел называют **телом отсчета***.*

Тело отсчета может быть выбрано совершенно произвольно. Им может быть придорожный столб при описании движения автомобиля, Земля при описании движения космического корабля, Солнце при описании движения планет и т.п.

Положение точки может быть задано совокупностью ее проекций на оси системы координат, связанной с телом отсчета (рис. 1.1) или, что эквивалентно, *вектором $\vec{r}$, соединяющим начало указанной системы координат с рассматриваемой точкой, который называют* **радиус-вектором** *этой точки.*

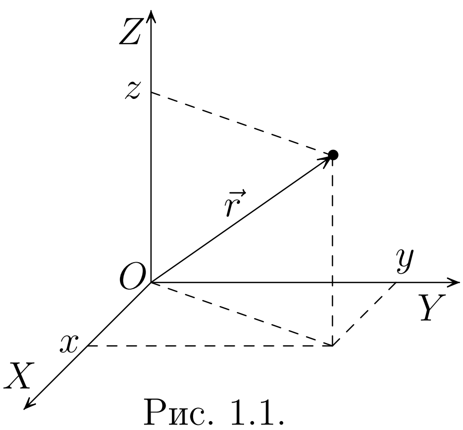


Рис. 1.1.

Связанные с телом отсчета система координат и часы составляют **систему отсчета***.*

Линию AB (рис. 1.2), *вдоль которой движется точка, называют* **траекторией движения** *этой точки. Длину l участка траектории, пройденного телом с момента начала отсчета времени, называют* **пройденным путем***, а вектор $\vec{s}$, проведенный из начального положения точки в ее положение в данный момент времени –* **перемещением***.*

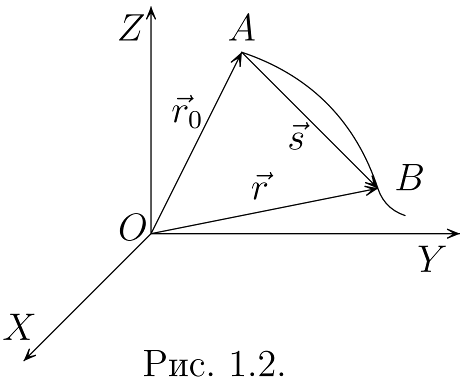


Рис. 1.2.

За единицу длины в системе СИ принимают метр (м). 1 м равен расстоянию, которое плоская электромагнитная волна (свет) проходит за 1/299792458 долю секунды, что соответствует примерно 1/40000000 части парижского меридиана. Секунда (с) – интервал времени равный 9192631770 периодам излучения атома цезия при переходе между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния. 1 секунда примерно равна $1/(24 \cdot 60 \cdot 60)$ звездных суток.

Вектор перемещения равен геометрической разности между радиусами-векторами текущего $\vec{r}$ и начального $\vec{r}_0$ положения точки:

$$\vec{s} = \Delta\vec{r}, \quad \text{где} \quad \Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0. \tag{1.1}$$

Следует заметить, что модуль (величина) вектора перемещения $|\vec{s}|$ всегда меньше или равен пройденному пути[1].

Уравнение

$$\vec{r} = \vec{r}(t), \tag{1.2}$$

определяющее зависимость радиус-вектора рассматриваемой точки от времени, называют **уравнением движения** *этой точки.* Такой способ записи уравнения движения называют **векторным**.

Уравнение (1.2) эквивалентно системе трех скалярных уравнений

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t) \end{cases}$$

для проекций рассматриваемой точки на оси координат. Такой способ записи уравнения движения называют **координатным**.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что называют: системой отсчета, траекторией, пройденным путем, перемещением, уравнением движения?

[1] **Замечание.** Обычно, при указании величины вектора, знак модуля принято опускать. Например, длину вектора $\vec{r}$ можно обозначить через r или $|\vec{r}|$, что эквивалентно. Однако, иногда один и тот же символ со знаком вектора и без используется для родственных, но не тождественных понятий. В частности, в ряде пособий под буквой s понимают длину пройденного пути, который, как было отмечено, не всегда равен величине перемещения. Поэтому в данном и ему подобных случаях знак модуля необходимо сохранять.

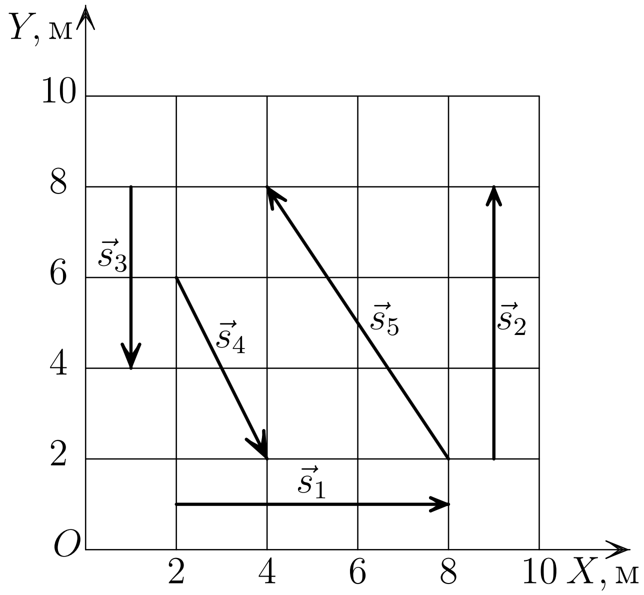


Рис. 1.3.

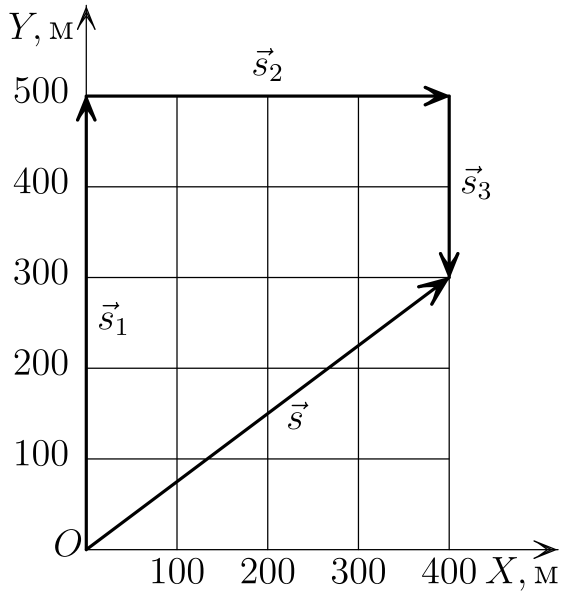


Рис. 1.4.

2. Произойдет ли столкновение двух кораблей если их траектории пересекаются?

3. Может ли величина (модуль) вектора перемещения быть больше, меньше или равна пройденному пути? Приведите примеры.

Примеры решения задач.

Задача 1. На рисунке 1.3 показаны векторы перемещения пяти точек. Найти проекции этих векторов на оси координат.

Решение. Проекцией вектора на ось называют число, равное разности координаты проекции конца и начала этого вектора на рассматриваемую ось. Проекцией точки на ось называют основание перпендикуляра, опущенного из этой точки на эту ось. Если вектор перпендикулярен некоторой оси, то его проекция на эту ось равна нулю. Если вектор параллелен и совпадает с направлением оси, то его проекция на эту ось равна длине этого вектора. Если вектор параллелен направлен в сторону противоположную оси, то его проекция на эту ось равна длине этого вектора, взятой со знаком «–».

Вектор $\vec{s}_1$ направлен вдоль оси OX, значит $s_{1x} = 6$ м, $s_{1y} = 0$. $\vec{s}_2$ направлен вдоль, а $\vec{s}_3$ против оси OY, поэтому $s_{2x} = 0$, $s_{2y} = 6$ м, $s_{3x} = 0$, $s_{3y} = -4$ м. Координата проекции конца $\vec{s}_4$ на ось OX – 4 м, начала – 2 м, следовательно $s_{4x} = 2$ м. Аналогично: $s_{4y} = -4$ м, $s_{5x} = -4$ м, $s_{5y} = 6$ м.

Ответ: $s_{1x} = 6$ м, $s_{1y} = 0$, $s_{2x} = 0$, $s_{2y} = 6$ м, $s_{3x} = 0$, $s_{3y} = -4$ м, $s_{4x} = 2$ м, $s_{4y} = -4$ м, $s_{5x} = -4$ м, $s_{5y} = 6$ м.

Задача 2. Туристы прошли сначала 500 м на север, затем 400 м на восток и 200 м на юг. Найти величину их перемещения и длину пройденного пути.

Дано:	**Решение.**
$l_1 = 500$ м	Введем систему координат, связанную с Землей. Ее начало совместим с исходным положением туристов. Оси OX и OY направим с запада на восток и с юга на север, соответственно (рис. 1.4).
$l_2 = 400$ м	
$l_3 = 200$ м	
$\lvert\vec{s}\rvert$, l – ?	

Как видно из рисунка, вектор перемещения

$$\vec{s} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3.$$

Проецируя записанное соотношение на оси координат, получим

$$\begin{aligned} OX: &\quad s_x = s_{1x} + s_{2x} + s_{3x}, \\ OY: &\quad s_y = s_{1y} + s_{2y} + s_{3y}. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом того, что $s_{1x} = s_{2y} = s_{3x} = 0$, $s_{1y} = l_1 = 500$ м, $s_{2x} = l_2 = 400$ м, $s_{3y} = l_3 = -200$ м, находим

$$s_x = 400 \text{ м}, \quad s_y = 300 \text{ м}.$$

По теореме Пифагора

$$\lvert\vec{s}\rvert = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 500\text{м}.$$

Длина пройденного туристами пути

$$l = l_1 + l_2 + l_3 = 1100 \text{ м}.$$

Ответ: $\lvert\vec{s}\rvert = 500$ м, $l = 1100$ м.

Задача 3. Составить уравнение траектории материальной точки, движущейся по плоскости, если ее координаты изменяются по закону:

а) $x(t) = at + b$, $y(t) = ct + d$;

б) $x(t) = at^2 + bt + c$, $y(t) = dt$;

в) $x(t) = a \sin t$, $y(t) = b \cos t$.

Решение.

Исключая из представленных соотношений время, получим

а) $y = \dfrac{c}{a}x + d - \dfrac{bc}{a}$ – прямая;

б) $x = \dfrac{a}{d^2}y^2 + \dfrac{b}{d}y + c$ – парабола;

в) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипс.

§ 2. Равномерное прямолинейное движение

Равномерным прямолинейным *называют движение, при котором тело за* **любые** *равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения.*

Из данного определения следует, что в случае равномерного прямолинейного движения вектор перемещения пропорционален времени движения:

$$\vec{s} = \vec{v}t. \tag{1.3}$$

Векторную величину $\vec{v}$, равную перемещению тела при его равномерном прямолинейном движении за единицу времени, называют **скоростью равномерного прямолинейного движения**.

За единицу скорости в Международной системе (СИ) единиц принимают скорость такого равномерного прямолинейного движения, при котором тело за 1 секунду проходит путь, равный 1 метру.

Из (1.3) с учетом (1.1) находим

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t. \tag{1.4}$$

Уравнение (1.4) представляет собой уравнение равномерного прямолинейного движения.

Проекция этого уравнения на любую из осей координат, например, на OX, дает

$$x = x_0 + v_x t. \tag{1.5}$$

Если направление OX совпадает с направлением движения тела, то проекция v_x равна величине вектора скорости. В этом случае формула (1.5) может быть записана в виде:

$$x = x_0 + vt.$$

Полученные соотношения позволяют определить координаты тела в любой момент времени.

Примеры решения задач.

Задача 4. Два велосипедиста движутся навстречу друг другу со скоростями 10 и 5 м/с соответственно. Расстояние между ними в начальный момент времени равно 240 м. Когда и где они встретятся.

Дано:
$v_1 = 10$ м/с
$v_2 = 5$ м/с
$l = 240$ м
t, x – ?

Решение.
Введем систему координат, связанную с Землей. Ее начало совместим с исходным положением первого велосипедиста. Ось OX направим вдоль направления его движения (рис. 1.5).

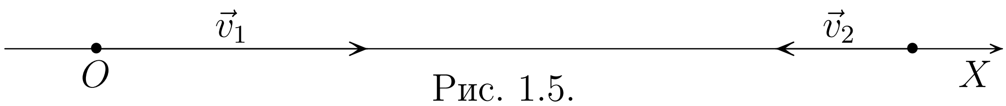


Рис. 1.5.

Составим уравнения движения каждого из велосипедистов:

$$x_1 = v_1 t, \quad x_2 = l - v_2 t. \tag{1.6}$$

Учитывая, что в момент встречи $x_1 = x_2$, получим

$$v_1 t = l - v_2 t.$$

Отсюда

$$t = \frac{l}{v_1 + v_2} = \frac{240}{10+5}\ c = 16\ c.$$

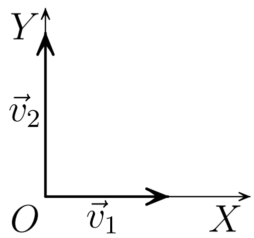
Подставляя полученное значение в любое из соотношений (1.6) находим координату места встречи

$$x = 10 \cdot 16\ \text{м} = 160\ \text{м}.$$

Ответ: $t = 16$ с, $x = 160$ м.

Задача 5. По двум взаимно перпендикулярным дорогам движутся два автомобиля со скоростями 54 и 72 км/ч. Определить расстояние между автомобилями через 10 мин. после встречи у перекрестка.

Дано:	СИ
$v_1 = 54$ км/ч	=15 м/с
$v_2 = 72$ км/ч	=20 м/с
$t = 10$ мин.	=600 с
l – ?	



Решение.
Введем систему координат, связанную с Землей. Ее начало совместим с перекрестком. Оси OX и OY направим вдоль направления движения первого и второго автомобиля

соответственно. Искомое расстояние

$$l = \sqrt{x_1^2 + y_2^2},$$

где

$$x_1 = v_1 t, \quad y_2 = v_2 t.$$

Отсюда находим

$$l = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 600\sqrt{15^2 + 20^2} \text{ м} = 15{\cdot}10^3 \text{м} = 15 \text{ км}$$

Ответ: $l = 15$ км.

Задача 6. Человек находится на берегу водоема в точке A (рис. 1.6.а). Ему необходимо в кратчайшее время попасть в точку B водоема. Расстояние от точки B до берега $BC = d_1$. Расстояние $AC = d_2$. Скорость движения человека в воде v_1, по суше v_2, причем $v_2 > v_1$. Как должен действовать человек: плыть по прямой AB или пробежать некоторое расстояние по берегу и после этого плыть по направлению к точке B?

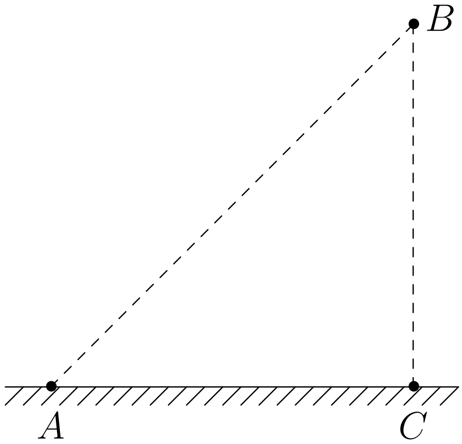


Рис. 1.6.а.

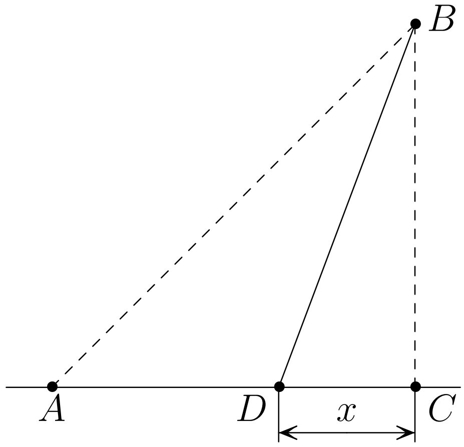


Рис. 1.6.б.

Решение.

Дано:
$BC = d_1$
$AC = d_2$
$v_2 > v_1$

x – ?

Предположим, что траектория движения человека – ломаная линия ADB (рис. 1.6.б). Время движения

$$t = \frac{\sqrt{l_1^2 + x^2}}{v_1} + \frac{l_2 - x}{v_2} = \frac{v_2\sqrt{l_1^2 + x^2} - v_1 x}{v_1} + \frac{l_2}{v_2}$$

будет минимальным для такого x, при котором функция

$$y = v_2\sqrt{l_1^2 + x^2} - v_1 x \tag{1.7}$$

имеет наименьшее значение.

Как известно из школьного курса математики, в точке экстремума функции ее производная равна нулю.

Используя правила дифференцирования, имеем

$$y' = \frac{v_2 x}{\sqrt{l_1^2 + x^2}} - v_1. \tag{1.8}$$

Приравнивая полученное выражение нулю, находим

$$x = \frac{l_1 v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}}. \tag{1.9}$$

Для того, чтобы функция (1.7) в указанной точке имела минимум необходимо чтобы ее производная в этой точке меняла знак с «−» на «+».

Покажем, что это условие также выполняется. Для этого представим (1.8) в виде

$$y' = \frac{v_2 - v_1\sqrt{\left(\frac{l_1}{x}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(\frac{l_1}{x}\right)^2 + 1}}.$$

В случае

$$x < \frac{l_1 v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \quad \left(\frac{l_1}{x}\right)^2 > \left(\frac{v_2}{v_1^2}\right)^2 - 1, \quad y' < 0$$

и наоборот, при

$$x > \frac{l_1 v_1}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \quad \left(\frac{l_1}{x}\right)^2 < \left(\frac{v_2}{v_1^2}\right)^2 - 1, \quad y' > 0.$$

Что и требовалось доказать.

Тем, кто не знаком с техникой дифференцирования, можно предложить другой подход к решению данной проблемы.

Рассматривая (1.7), как уравнение относительно x, запишем:

$$(v_2^2 - v_1^2)x^2 - 2v_1 yx + v_2^2 l_1^2 - y^2 = 0.$$

Отсюда находим

$$x = \frac{v_1 y \pm v_2\sqrt{y^2 - (v_2^2 - v_1^2)l_1^2}}{v_2^2 - v_1^2}.$$

По определению x является действительным числом, следовательно,

$$y \geq l_1\sqrt{v_2^2 - v_1^2}.$$

Минимально возможному, удовлетворяющему этому неравенству, значению $y = l_1\sqrt{v_2^2 - v_1^2}$ соответствует полученное ранее (1.9).

Ответ: Если $l_1 v_1/\sqrt{v_2^2 - v_1^2} \geq l_2$, то человеку следует плыть по прямой AB. В противном случае необходимо пробежать по берегу расстояние $l_2 - l_1 v_1/\sqrt{v_2^2 - v_1^2}$, после чего плыть по направлению к точке B.

§ 3. Описание неравномерного движения

3.1. Кинематические характеристики неравномерного движения

В случае произвольного характера движения, векторную величину, равную отношению перемещения к интервалу времени, за который это перемещение произошло,

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \qquad (1.10)$$

называют **средней скоростью**.

Средняя скорость *на рассматриваемом участке траектории представляет собой скорость такого равномерного прямолинейного движения, при которой за данный интервал времени совершается перемещение, равное перемещению рассматриваемого тела при его реальном движении.*

Часто, говоря о средней скорости, например, автомобиля, имеют в виду не величину вектора средней скорости, а **среднюю путевую скорость**. определяемую как путь, который тело в среднем проходит за единицу времени:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta l}{\Delta t}.$$

Несложно показать, что

$$|\vec{v}_{\text{ср}}| \leq v_{\text{ср}}.$$

Равенство имеет место лишь в случае, когда в процессе движения его направление остается неизменным.

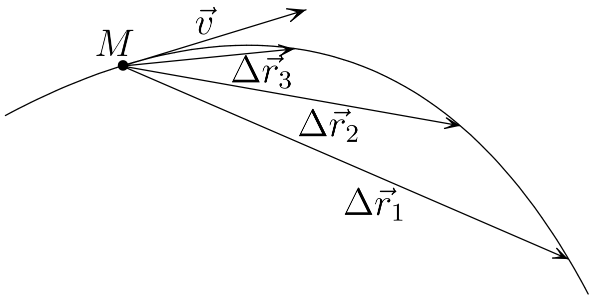


Рис. 1.7.

По мере уменьшения интервала времени (рис. 1.7) вектор перемещения приближается к касательной к траектории в точке, где находится тело в рассматриваемый момент времени, при этом модуль вектора перемещения Δr становится равным длине пройденного пути Δl, а отношение $\Delta l/\Delta t$ стремится к некоторой конечной величине.

Величину

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t}, \tag{1.11}$$

равную отношению пути, к интервалу времени, за который этот путь был пройден, вычисленному при условии достаточной малости указанного интервала времени, называют **линейной скоростью** тела[2].

Здесь и далее везде условие малости определяется требованием того, чтобы изменением вычисляемого параметра на рассматриваемом интервале времени можно было пренебречь.

Таким образом, **линейная скорость** – *это физическая величина, равная пути, который пройдет тело за единицу времени, если продолжит двигаться также, как и в данный момент времени.*

Вектор

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \tag{1.12}$$

[2]Для тех, кто знаком с элементами математического анализа, можно дать более строгую с математической точки зрения, формулировку: **линейной скоростью** называют величину

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t}$$

равную пределу отношения пути, к интервалу времени, за который этот путь был пройден, при стремлении указанного интервала времени к нулю.

равный отношению вектора перемещения тела к промежутку времени, за который это перемещение произошло, вычисленному при условии достаточной малости указанного интервала времени, называют **мгновенной скоростью** или просто **скоростью**[3].

Скорость (**мгновенная скорость**) – *это физическая величина, равная перемещению, которое совершило бы тело за единицу времени, если бы продолжило двигаться с той же скоростью, как и в данный момент времени.*

Вектор мгновенной скорости равен по величине линейной скорости и направлен по касательной к траектории в той точке, в которой тело находится в рассматриваемый момент времени.

Особую значимость представляет быстрота изменения скорости.

Величину

$$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}, \tag{1.13}$$

равную отношению изменения скорости тела к промежутку времени, за который это перемещение произошло, вычисленному при условии достаточной малости указанного интервала времени, называют **ускорением** (**мгновенным ускорением**)[4].

Ускорение (**мгновенное ускорение**) – *это физическая величина, равная приращению, которое получил бы вектор скорости тела*

---

[3]Или, что эквивалентно, **скорость** (**мгновенная скорость**) равна пределу отношения вектора перемещения тела к промежутку времени, за который это перемещение произошло, при стремлении указанного промежутка времени к нулю:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}.$$

Напомним, что в математике, предел отношения приращения функции к приращению ее аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю называют производной этой функции. Записывают

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Таким образом вектор скорости материальной точки представляет собой производную радиус вектора, определяющего ее положение в пространстве, по времени. Для того, чтобы подчеркнуть особую роль времени, процедуру взятия производной обозначают не штрихом, а точкой: $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$, хотя допускается и стандартное обозначение: $\vec{v} = \vec{r}\,'$.

[4]Более строго: **ускорение** (**мгновенное ускорение**) равно пределу отношения изменения скорости тела к промежутку времени, за который это изменение

за единицу времени, если оно продолжало бы двигаться с тем же ускорением, что и в данный момент времени.

Движение с постоянным (по величине и по направлению) ускорением называют **равноускоренным**.

За единицу ускорения принимают ускорение такого равноускоренного движения, при котором за единицу времени скорость изменяется на единицу скорости.

В системе СИ ускорение измеряется в метрах в секунду за секунду:

$$[a] = \text{м/с}^2.$$

Как видно из рисунка 1.8:

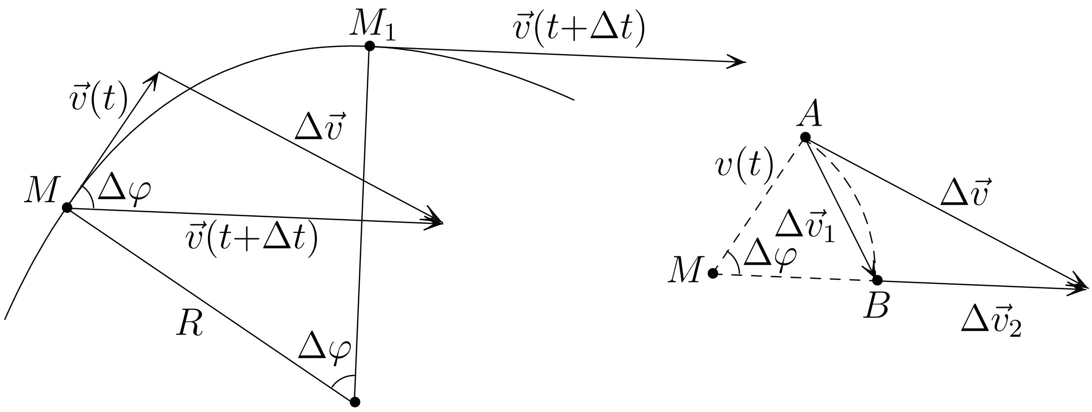


Рис. 1.8.

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t) = \Delta\vec{v}_1 + \Delta\vec{v}_2.$$

Соответственно,

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \tag{1.14}$$

произошло, при стремлении указанного интервала времени к нулю:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}.$$

Ускорение материальной точки может быть определено и как производная вектора ее скорости или, что эквивалентно, вторая производная радиус вектора, определяющего положение этой точки в пространстве, по времени:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}.$$

где

$$\vec{a}_n = \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t}, \quad \vec{a}_\tau = \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t}. \tag{1.15}$$

Первое слагаемое в (1.14) обусловлено изменением направления, второе – величины скорости.

Опуская строгие математические выкладки отметим, что по мере уменьшении интервала времени Δt точка M_1 приближается к точке M, при этом уменьшается и угол $\Delta\varphi$ между касательными к траектории в указанных точках или, что эквивалентно, вежду векторами $\vec{v}(t+\Delta t)$ и $\vec{v}(t)$, тогда как угол $\angle MAB = \angle ABM$ стремится к $\pi/2$ [5].

Таким образом, *вектор* $\vec{a}_n$ направлен вдоль нормали (перпендикуляра) к траектории движения, поэтому его *называют* **нормальным** *ускорением.*

Перейдем к определению величины a_n.

Из треугольника MAB

$$\Delta v_1 = 2v(t)\sin\frac{\Delta\varphi}{2},$$

что при достаточной малости $\Delta\varphi$ дает

$$\Delta v_1 = v\Delta\varphi. \tag{1.16}$$

Рассматривая кривую MM_1, как дугу окружности радиуса R, находим

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta l}{R}. \tag{1.17}$$

Здесь Δl – длина рассматриваемого участка траектории.

Величину R, равную радиусу дуги окружности, с которой совпадает траектория материальной точки в окрестности того места, где эта точка находится, называют **радиусом кривизны** *траектории в рассматриваемой точке. Центр указанной окружности, называют* **центром кривизны траектории**.

[5]В дальнейшем, если не оговорено обратное, будем полагать, что все углы измеряются в радианах. Напомним, *радиан – это центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности.* Связь между радианной и градусной мерой угла определяется соотношением 2π рад=360°. Отсюда следует, что 1 рад=$57^o17'45''$, $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ рад.

Таким образом, вектор $\vec{a}_n$, направлен от рассматриваемой точки траектории к центру ее кривизны. Отсюда другое его название – **центростремительное** ускорение.

Подставляя (1.16) и (1.17) в (1.15), имеем

$$a_n = \frac{v}{R}\frac{\Delta l}{\Delta t},$$

что, с учетом (1.11), дает

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \tag{1.18}$$

Вектор $\vec{a}_\tau$ направлен вдоль касательной к траектории движения. Поэтому его *называют* **касательным** (или **тангенциальным**) *ускорением.*

Величина тангенциального ускорения определяется соотношением

$$a_\tau = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}. \tag{1.19}$$

По теореме Пифагора

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{1.20}$$

3.2. Равноускоренное движения

При рассмотрении ряда практически значимых явлений изменением ускорения тела в процессе его движения можно пренебречь.

Одним из таковых является **свободное падение**, т.е. *движение тела только под действием притяжения к Земле.* Как было экспериментально установлено итальянским ученым Галилео Галилеем (1564–1642), все тела независимо от их массы в отсутствии сопротивления воздуха падают с одинаковым ускорением. Последнее называют ускорением свободного падения и обозначают буквой g от латинского слова gravitation (притяжение). Вектор $\vec{g}$ всегда направлен вертикально вниз и равен по величине 9,8 м/c^2. При решении задач (если не оговорено обратное) принимают $g = 10$ м/с^2.

Равноускоренным можно также считать разгон (торможение) автомобиля, движение тела по наклонной плоскости и т.п.

В случае равноускоренного движения определение (1.13), в силу условия постоянства ускорения, может быть записано в виде

$$\vec{a} = \frac{\vec{v} - \vec{v}_0}{t}. \tag{1.21}$$

Отсюда находим

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t. \tag{1.22}$$

Соответствующая (1.22) зависимость $\vec{r}$ от t задается соотношением

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \tag{1.23}$$

В чем несложно убедиться подстановкой (1.23) в (1.12):

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\vec{v}_0 + at + \frac{a\Delta t}{2} \right) = \vec{v}_0 + \vec{a}t,$$

или непосредственным дифференцированием (1.23) по времени.

Проецируя (1.21–1.22) на любую из осей координат, например, на OX, имеем

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t}, \tag{1.24}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t, \tag{1.25}$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}, \tag{1.26}$$

соответственно.

Решая (1.25) относительно t и подставляя полученный результат в (1.26), приходим еще одному, чрезвычайно полезному соотношению:

$$s_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}, \tag{1.27}$$

где $s_x = x - x_0$ – проекция вектора перемещения на рассматриваемую ось.

3.3. Движение материальной точки по окружности

Положение точки M, движущейся по окружности заданного радиуса R (рис. 1.9), однозначно определяется углом φ между произвольно выбранным фиксированным направлением, например, OA и радиус-вектором $\vec{r}$, соединяющим центр этой окружности с рассматриваемой точкой, или, что эквивалентно, длиной дуги AM

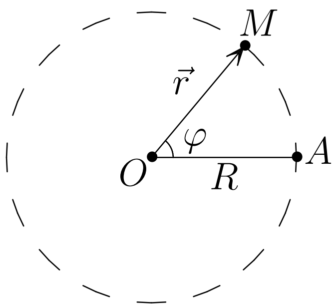


Рис. 1.9.

$$l = R\varphi. \tag{1.28}$$

С учетом (1.28) линейная скорость рассматриваемой точки и ее центростремительное ускорение могут быть представлены в виде

$$v = R\omega, \tag{1.29}$$

$$a_n = R\omega^2 \tag{1.30}$$

где

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{1.31}$$

Величину ω, равную отношению угла $\Delta\varphi$, на который поворачивается радиус вектор рассматриваемой точки за достаточно малый промежуток времени, к величине этого промежутка, называют **угловой скоростью** движения этой точки.

Угловая скорость – *это физическая величина, равная углу, на который повернулся бы радиус вектор точки если бы она продолжила движение с той же угловой скоростью, как и в данный момент времени.*

Единица измерения угловой скорости – радиан в секунду (1 рад/с).

Аналогично,

$$a_\tau = R\varepsilon, \tag{1.32}$$

$$\varepsilon = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{1.33}$$

Величину ε, равную отношению изменения угловой скорости тела за достаточно малый интервал времени к величине этого интервала, называют **угловым ускорением**.

Угловое ускорение – *это физическая величина, равная приращению, которое получила бы угловая скорость движения точки за единицу времени, если бы она продолжала двигаться с тем же угловым ускорением, что и в данный момент времени.*

Единица измерения углового ускорения – радиан в секунду за секунду (1 рад/с^2).

Несложно показать, что при условии постоянства углового ускорения имеют место соотношения аналогичные полученным для равноускоренного движения:

$$\varepsilon = \frac{\omega - \omega_0}{t}, \tag{1.34}$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t, \tag{1.35}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \tag{1.36}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2\varepsilon}. \tag{1.37}$$

В случае движения с постоянной угловой скоростью, вводят понятие **периода обращения** T.

Периодом обращения *называют минимальный интервал времени, в течение которого точка возвращается в исходное положение, т.е. совершает один полный оборот.*

Из определения (1.31) следует, что

$$T = 2\pi\omega. \tag{1.38}$$

Замечание. Под M на рис. 1.9 можно понимать некоторую точку абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг заданной оси. В силу определения (стр. 6), все остальные точки этого тела будут иметь те же значения угловой скорости и ускорения, что и рассматриваемая точка. Поэтому указанные параметры могут быть использованы для описания вращения тела в целом.

Отметим попутно, что *физическую величину, равную числу оборотов, которое совершает тело за единицу времени, называют* **частотой вращения**

Частота связана с периодом соотношением :

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{1.39}$$

Единица измерения частоты – *герц* (Гц): 1 Гц=1 $с^{-1}$.

Необходимо учитывать, что при одинаковом обозначении и названии, данные термины, в приложении к описанию движения точки по окружности с одной стороны и вращения тела с другой, имеют принципиально разный смысл: в первом случае они характеризуют движение точки, во втором – вращение тела.

Точка вращаться не может по определению (см. замечание на стр. 6).

Вопросы для самоконтроля.

1. Что называют средней и мгновенной скоростью? Может ли мгновенная скорость точки совпадать с ее средней скоростью? Приведите примеры.

2. Как направлен вектор мгновенной скорости? Приведите примеры, иллюстрирующие этот факт.

3. Что называют линейной (путевой скоростью)? Может ли модуль средней скорости быть больше, меньше или равен средней путевой скорости? Приведите примеры.

4. Что называют ускорением? Как направлены нормальное и тангенциальное ускорения?

5. Какое движение называют равноускоренным? Приведите примеры.

6. Что называют угловой скоростью и ускорением движения точки? Как они связаны с соответствующими линейными величинами и чем отличаются от параметров, характеризующих вращение тела?

7. Что называют периодом обращения? Как он связан с угловой скоростью?

Примеры решения задач.

Задача 7. Определить среднюю скорость пешехода, если первые 12 км пути он прошел со скоростью 6 км/ч, а последующие 3 км – со скоростью 3 км/ч.

Дано:
$s_1 = 12$ км
$s_2 = 3$ км
$v_1 = 6$ км/ч
$v_2 = 3$ км/ч

$v_{\text{ср}}$ – ?

Решение.

Подставляя в определение средней скорости (1.10) значение

$$s = s_1 + s_2 \quad \text{и} \quad t = t_1 + t_2,$$

с учетом

$$t_1 = \frac{s_1}{v_1} = \frac{12}{6}\ \text{ч} = 2\ \text{ч}, \quad t_2 = \frac{s_2}{v_2} = \frac{3}{3}\ \text{ч} = 1\ \text{ч},$$

находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{12+3}{1+2}\ \text{км/ч} = 5\ \text{км/ч}.$$

Ответ: $v_{\text{ср}} = 5$ км/ч.

Задача 8. Трое туристов, обладающих одним велосипедом, должны прибыть на базу в кратчайший срок (время определяется по последнему прибывшему). Велосипед может взять лишь двоих, поэтому третьему приходится сначала идти пешком. Велосипедист довозит второго туриста до некоторой точки маршрута, откуда тот продолжает движение пешком, и возвращается за третьим. Найти среднюю скорость туристов, если скорость пешехода 4 км/ч, а велосипедиста – 20 км/ч.

Дано:
$v_1 = 4$ км/ч
$v_2 = 20$ км/ч

$v_{\text{ср}}$ – ?

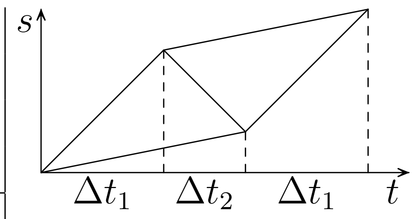


Рис. 1.10.

Решение.

Т.к. время определяется по последнему прибывшему, то минимальным оно будет в том случае, если все три туриста прибудут одновременно.

Для этого необходимо, чтобы на движение пешком туристы затратили одинаковое время $\Delta t_1 + \Delta t_2$, где Δt_2 – время обратного движения велосипедиста (см. рис. 1.10). Таким образом, за время $t = 2\Delta t_1 + \Delta t_2$ каждый из туристов пройдет путь $s = v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2) + v_2\Delta t_1$. Следовательно,

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2) + v_2\Delta t_1}{2\Delta t_1 + \Delta t_2}. \tag{1.40}$$

С другой стороны

$$v_2\Delta t_1 - v_2\Delta t_2 = v_1(\Delta t_1 + \Delta t_2).$$

Отсюда

$$\Delta t_2 = \frac{v_2 - v_1}{v_2 + v_1}\Delta t_1.$$

Подставляя полученное соотношение в (1.40), находим

$$v_{\text{ср}} = \frac{3v_1 + v_2}{3v_2 + v_1}v_2 = \frac{3 \cdot 4 + 20}{3 \cdot 20 + 4} \cdot 20 \text{ км/ч} = 10 \text{ км/ч}.$$

Ответ: $v_{\text{ср}} = 10$ км/ч.

Задача 9. Автомобиль, двигаясь прямолинейно с постоянным ускорением, увеличил свою скорость с 15 до 20 м/с за 10 секунд. Определить его ускорение и пройденный за указанное время путь.

Дано:
$v_0 = 15$ м/с
$v = 20$ м/с
$t = 10$ с
a, s – ?

Решение.

Принимая за OX направление движения автомобиля и опуская в (1.24) и (1.26) соответствующие индексы, имеем

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{20 - 15}{10} \text{ м/с}^2 = 0.5 \text{ м/с}^2,$$

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2} = 15 \cdot 10 \text{ м} + \frac{0.5 \cdot 100}{2} \text{ м} = 175 \text{ м}.$$

Ответ: $a = 0.5$ м/с^2, $s = 175$ м.

Задача 10. Движение точки задано уравнением $x = 2 + 3t - 4t^2$, где все величины выражены в СИ. Определить начальную координату, скорость и ускорение этой точки.

Дано:
$x = 2 + 3t - 4t^2$
x_0, v_{0x}, a_x – ?

Решение.

Сравнивая представленное выражение с уравнением равноускоренного движения

$$x = x_0 + v_{0x}t + a_x t^2/2,$$

находим

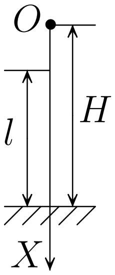
$$x_0 = 2 \text{ м}, \quad v_{0x} = 3 \text{ м/с}, \quad a_x = -8 \text{ м/с}^2.$$

Ответ: $x_0 = 2$ м, $v_{0x} = 3$ м/с, $a_x = -8$м/с^2.

Задача 11. С какой высоты падал камень, если за последнюю секунду своего падения он прошел путь $l = 15$ м?

Дано:
$\Delta t = 1$ с
$l = 15$ м

H – ?



Решение.

Введем систему координат, связанную с Землей. Начало совместим с исходным положением камня. Ось OX направим вертикально вниз. Движение камня определяется уравнением (1.23), где $\vec{a} = \vec{g}$ – ускорение свободного падения.

Проецируя указанное уравнение на выбранное направление, получим

$$x = gt^2/2.$$

Полагая t равным времени падения камня на Землю, имеем

$$H = gt^2/2, \quad H - l = g(t - \Delta t)^2/2.$$

Отсюда находим

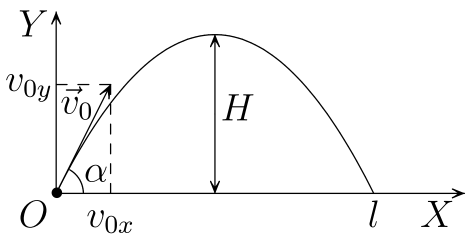
$$t = \frac{\Delta t}{2} + \frac{l}{g\Delta t}, \quad H = \frac{g}{2}\left(\frac{\Delta t}{2} + \frac{l}{g\Delta t}\right)^2 = 5\left(\frac{1}{2} + \frac{15}{10}\right)^2 \text{ м} = 20 \text{ м}.$$

Ответ: $H = 20$ м.

Задача 12. Тело брошено со скоростью v_0 под углом α к горизонту. Получить уравнение траектории его движения. Найти высоту максимального подъема, время и дальность полета. Определить радиус кривизны траектории в ее наивысшей точке и в начале движения.

Дано:
v_0
α

H, t, l,
R_1, R_2– ?



Решение.

Введем систему координат, связанную с Землей. Начало совместим с исходным положением тела. Ось OY направим вертикально вверх, OX – горизонтально, так, чтобы вектор начальной скорости лежал в плоскости XOY.

Проецируя (1.23) и (1.22), на оси координат, получим

$$OX: \quad x = v_{0x}t, \tag{1.41}$$

$$v_x = v_{0x}, \tag{1.42}$$

$$OY: \quad y = v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \tag{1.43}$$

$$v_y = v_{0y} - gt, \tag{1.44}$$

где

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \quad v_{0y} = v_0 \sin\alpha. \tag{1.45}$$

Исключая из уравнений (1.41) и (1.43) время, имеем

$$y = x\frac{v_{0y}}{v_{0x}} - x^2\frac{g}{2v_{0x}^2},$$

что с учетом (1.45) дает

$$y = x \operatorname{tg}\alpha - x^2\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}. \tag{1.46}$$

Полученное соотношение представляет собой уравнение параболы.

Для определения высоты подъема воспользуемся соотношением (1.27), записанным для проекций входящих в него векторов на направление оси OY:

$$y = \frac{v_{0y}^2 - v_y^2}{2g}.$$

Учитывая, что в наивысшей точке траектории $v_y = 0$, находим[6]

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}.$$

Полагая t в уравнениях (1.41) и (1.43) равным времени полета, запишем

$$l = v_0\cos\alpha t, \tag{1.47}$$

$$0 = v_0\sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.48}$$

Уравнение (1.48) имеет два корня, один из которых $t = 0$ соответствует моменту бросания, второй

$$t = \frac{2v_0\sin\alpha}{g},$$

представляет собой искомое время полета.

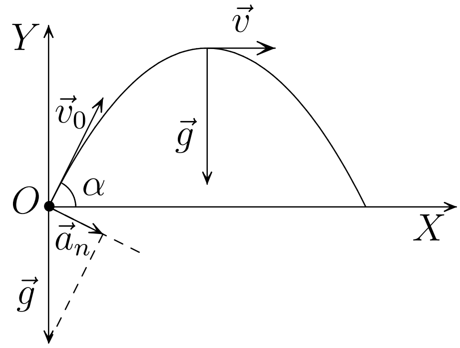
[6] Тот же результат можно получить определяя из уравнения (1.44) при условии $v_y = 0$ время подъема и подставляя полученное значение в (1.43). Однако, такой подход требует бóльшего количества действий.

Подставляя найденное выражение в (1.41) после соответствующих преобразований, находим

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Для определения радиуса кривизны траектории необходимо воспользоваться соотношением (1.18), откуда следует, что

$$R = \frac{v^2}{a_n}.$$



В наивысшей точке траектории

$$v = v_{0x},\ a_n = g,\ R_1 = \frac{v_{0x}^2}{g} = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}.$$

В начале движения

$$v = v_0,\ a_n = g \cos \alpha, ; R_2 = \frac{v_0^2}{g \cos \alpha}.$$

Ответ: $H = \dfrac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$, $t = \dfrac{2v_0 \sin \alpha}{g}$, $l = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$, $R_1 = \dfrac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}$, $R_2 = \dfrac{v_0^2}{g \cos \alpha}$.

Задача 13. Определить минимальную скорость и направление, в котором следует бросить мяч, чтобы он перелетел через вертикальную стену высотой H, находящуюся на расстоянии l от точки бросания (рис. 1.11.а).

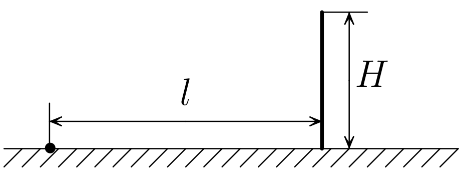


Рис. 1.11.а.

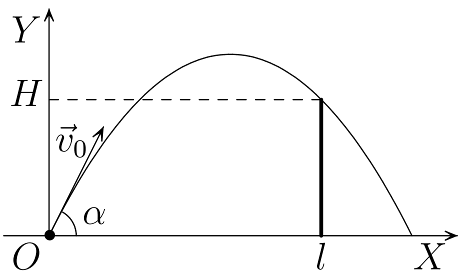


Рис. 1.11.б.

Дано:	
H	
l	
$v_{\min}$, α – ?	

Решение.

Траектория движения камня должна проходить через точку с координатами (l, H) (рис. 1.11.б). Отсюда, с учетом соотношения (1.46), имеем

$$H = l \operatorname{tg} \alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} .$$

Решая представленное уравнение относительно v_0^2, находим

$$v^2 = \frac{gl^2}{2(l \operatorname{tg} \alpha - H) \cos^2 \alpha} = \frac{gl^2}{l \sin 2\alpha - H(\cos 2\alpha + 1)} =$$
$$= \frac{gl^2}{\sqrt{l^2 + H^2} \sin(2\alpha - \varphi) - H},$$

где $\varphi = \operatorname{arctg}(H/l)$.

Минимальное значение

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{gl^2}{\sqrt{l^2 + H^2} - H}} = \sqrt{gl^2 \left(\sqrt{l^2 + H^2} + H\right)}$$

достигается при $\alpha = \varphi/2 + \pi/4$.

Ответ: $v_{\min} = \sqrt{gl^2 \left(\sqrt{l^2 + H^2} + H\right)}$, $\alpha = \operatorname{arctg}(H/l)/2 + \pi/4$.

Задача 14. Найти угловую и линейную скорость движения Земли вокруг Солнца, считая ее орбиту круговой с радиусом $R = 1,5 \cdot 10^8$ км.

Прежде чем приступать к решению данной задачи отметим, что Земля совершает полный оборот вокруг Солнца за 365 суток.

Дано:	СИ
$R = 1{,}5 \cdot 10^8$ км	$= 1{,}5 \cdot 10^{11}$ м
$T = 365$ суток	$= 365 \cdot 24 \cdot 3600$ с $=$
	$= 3{,}2 \cdot 10^7$ с
ω, v – ?	

Решение.

Решая (1.38) относительно ω, получим

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{3{,}2 \cdot 10^7} \frac{\text{рад}}{\text{с}} = 2 \cdot 10^7 \, \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Для вычисления линейной скорости можно воспользоваться соотношением (1.29) или определением (1.11). Последнее по мнению автора представляется более предпочтительным.

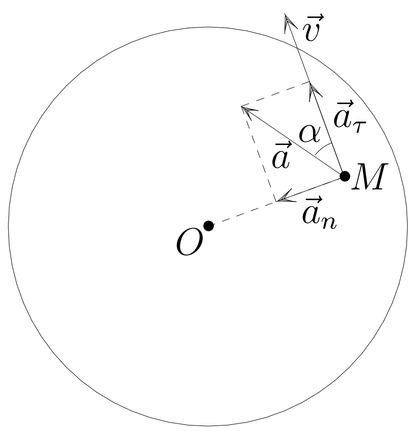
Учитывая, что за время T Земля проходит путь $l = 2\pi R$, в соответствие с вышесказанным, находим

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 1{,}5{\cdot}10^8}{3{,}2{\cdot}10^7} \frac{\text{м}}{\text{с}} = 3{\cdot}10^4\,\text{м/с} = 30\,\text{км/с}.$$

Ответ: $\omega = 2{\cdot}10^7$ рад/с, $v = 30$ км/с.

Задача 15. Диск начинает вращение с постоянным угловым ускорением. Найти угол между векторами скорости и ускорения произвольной точки диска после того как он сделает k оборотов.

Дано:	**Решение.**
k	Рассмотрим произвольную точку M, находящуюся на расстоянии R от оси вращения диска.
α – ?	



Искомый угол определяется соотношением $\alpha{=}\,\mathrm{arctg}(a_n/a_\tau)$, что, с учетом $a_n{=}v^2/R{=}\omega^2 R$, $a_\tau{=}R\varepsilon$, дает $\alpha{=}\,\mathrm{arctg}(\omega^2/\varepsilon)$. Отсюда, в силу $\varphi{=}\dfrac{\omega^2}{2\varepsilon}$, где $\varphi{=}2\pi k$, находим $\alpha{=}\,\mathrm{arctg}(4\pi k)$.

Ответ: $\alpha = \mathrm{arctg}(4\pi k)$.

§ 4. Относительность движения

Повседневный опыт каждого из нас свидетельствует о зависимости движения тела от выбора системы отсчета. Например, находясь в салоне автомобиля, мчащегося по дороге, мы видим деревья, движущимися в обратную сторону.

Выясним, как кинематические характеристики точки преобразуются при переходе от одной системы отсчета к другой.

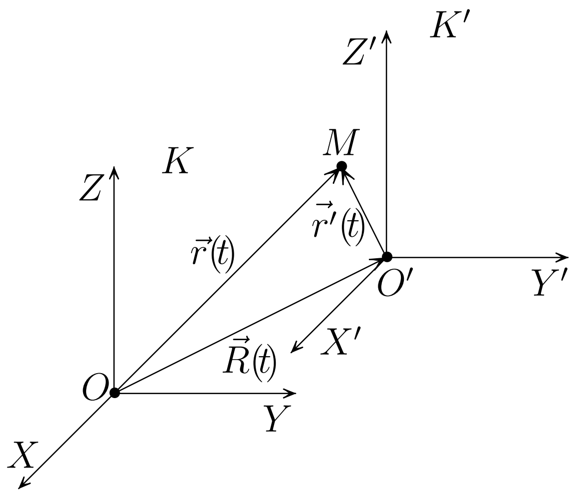


Рис. 1.12.

Введем две системы отсчета K $(OXYZ)$ и K' $(O'X'Y'Z')$ движущиеся одна относительно другой (рис. 1.12). Учитывая, что описание вращательного движения требует выходящего за рамки школьного курса математики аппарата векторной алгебры, ограничимся рассмотрением поступательного движения (см. определение на стр. 6). Условимся считать «нештрихованную» систему отсчета неподвижной.

Рассмотрим произвольную точку, положение которой в некоторый момент времени t относительно систем K и K' определяется векторами $\vec{r}(t)$ и $\vec{r}'(t)$, соответственно. Как видно из рисунка

$$\vec{r}(t) = \vec{R}(t) + \vec{r}'(t). \tag{1.49}$$

Аналогично, в момент времени $t + \Delta t$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{R}(t + \Delta t) + \vec{r}'(t + \Delta t). \tag{1.50}$$

Вычтем из (1.50) (1.49) и разделим полученное уравнение на Δt. Полагая, что интервал времени Δt достаточно мал, в соответствии с определением мгновенной скорости (1.12), имеем

$$\vec{v} = \vec{v}_{o'} + \vec{v}'. \tag{1.51}$$

Здесь $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ скорость точки M относительно систем K и K', $\vec{v}_{o'}$ скорость системы K' относительно K в рассматриваемый момент времени.

Повторяя изложенную процедуру с (1.51), приходим к уравнению

$$\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a}', \tag{1.52}$$

связывающему ускорение $\vec{a}$ точки M относительно системы K с ее ускорением $\vec{a}'$ в системе K' и ускорением $\vec{a}_{o'}$ системы K' относительно K.

Соотношения (1.51) и (1.52) могут быть получены дифференцированием (1.49) по времени.

Таким образом, *скорость (ускорение) тела относительно системы отсчета, принятой за неподвижную, равна сумме скорости (ускорения) этого тела относительно движущейся системы отсчета и скорости (ускорения) движущейся системы отсчета относительно неподвижной.*

Следует отметить симметрию уравнений (1.51) и (1.52) относительно перестановки индексов:

$$\vec{v}' = \vec{v}_o + \vec{v}$$
$$\vec{a}' = \vec{a}_o + \vec{a},$$

где $\vec{v}_o = -\vec{v}_{o'}$ и $\vec{a}_o = -\vec{a}_{o'}$ – векторы скорости и ускорения точки O относительно системы K'.

Данный факт отражает условность деления систем отсчета на неподвижную и подвижную.

Дополнительно необходимо подчеркнуть, что формулы (1.51) и (1.52) получены для случая поступательного движения одной системы отсчета относительно другой. При более сложном движении в указанных выражениях появятся дополнительные слагаемые. Однако, их общий характер останется прежним в том смысле, что кинематические характеристики точки, измеренные относительно одной системы отсчета, складываются из соответствующих ее характеристик относительно другой системы отсчета и слагаемых, обусловленных движением систем отсчета.

Примеры решения задач.

Задача 16. Легковой автомобиль движется со скоростью $v_1 = 90$ км/ч за автобусом, скорость которого $v_2 = 60$ км/ч. Через сколько времени автомобиль догонит автобус, если в начальный момент времени расстояние между ними составляло $l = 1$ км.

Дано:
$v_1 = 90$ км/ч
$v_2 = 60$ км/ч
$l = 1$ км
t – ?

Решение.

Введем две системы отсчета, одну из которых свяжем с Землей, другую с автобусом. В соответствии с (1.51)

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v_1}',$$

где $\vec{v_1}'$ скорость автомобиля относительно автобуса. Проецируя представленное соотношение на направление движения автобуса, находим:

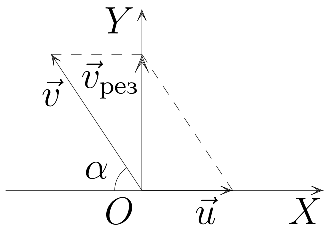
$$v_1' = v_1 - v_2, \quad t = \frac{l}{v_1'} = \frac{1}{90-60} \text{ ч} = \frac{1}{30} \text{ ч} = 2 \text{ мин}.$$

Ответ: t=2 минуты.

Задача 17. Под каким углом к берегу должна двигаться лодка, чтобы пересечь реку по кратчайшему пути? Скорость течения реки u, скорость лодки относительно воды $v > u$.

Дано:
u
v

$\alpha - ?$



Решение.

Результирующая скорость лодки $\vec{v}_{\text{рез}}$ относительно системы отсчета XOY, связанной с Землей, определяется соотношением

$$\vec{v}_{\text{рез}} = \vec{u} + \vec{v}.$$

Учитывая, что пройденный лодкой путь будет минимальным при $\vec{v}_{\text{рез}} \perp OX$, находим

$$\alpha = \arccos\,(u/v).$$

Заметим, что полученное соотношение имеет место только при условии $v > u$.

Ответ: $\alpha = \arccos\,(u/v)$.

Задача 18. По прямому шоссе со скоростью $v_1 = 16$ м/с движется автобус. На расстоянии $l = 60$ м от шоссе и $L = 400$ м от автобуса находится человек. В каком направлении он должен бежать, чтобы выйти к шоссе одновременно с автобусом или раньше его? Скорость человека $v_1 = 4$ м/с. Найти минимальное значение скорости, при котором человек может успеть встретить автобус.

Дано:
$v_1 = 16$ м/с
$v_2 = \;\;4$ м/с
$l = \;\;60$ м
$L = 400$ м

$\alpha,\ v_{\min} - ?$

Решение.

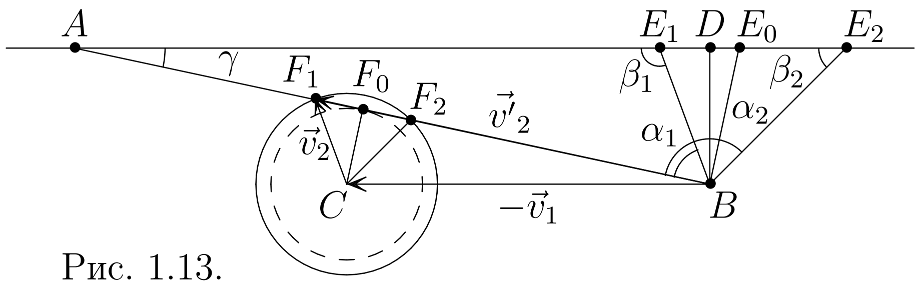


Рис. 1.13.

Предположим, что автобус находится в точке A (рис. 1.13), а человек – в точке B. Согласно условию

$$AB = L, \quad DB = l. \tag{1.53}$$

Введем две системы отсчета, одну из которых свяжем с Землей, другую – с автобусом. В соответствии с (1.51)

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}'_2, \tag{1.54}$$

где $\vec{v}'_2$ – скорость человека относительно автобуса.

Решая (1.54) относительно $\vec{v}'_2$, находим

$$\vec{v}'_2 = -\vec{v}_1 + \vec{v}_2. \tag{1.55}$$

Как показано на рисунке, при фиксированных значениях v_1 и v_2 геометрическим местом точек задающих положение конца вектора $\vec{v'}_2$, определенного соотношением (1.55), является окружность.

Человек выйдет к шоссе одновременно с автобусом, если вектор $\vec{v'}_2$ будет совпадать с направлением прямой BA, соединяющей его и автобус. Это возможно в случае, когда вектор $\vec{v}_2$ направлен вдоль прямой CF_1, как на рисунке, или F_2. При этом он окажется на шоссе в точках E_1 или E_2 соответственно. Полагается, что $BE_i \parallel CF_i$ (здесь и далее i=1 или 2).

По теореме синусов из $\triangle ABE_i$, имеем

$$\sin\alpha_i = \frac{AE_i}{AB}\sin\beta_i,$$

что, с учетом (1.53) и вытекающего из $\triangle BE_iD$ $\sin\beta_i = \dfrac{DB}{BE_i}$, дает

$$\sin\alpha_i = \frac{l}{L}\,\frac{AE_i}{BE_i}.$$

С другой стороны, по признаку равенства углов, $\triangle ABE_i \sim \triangle BF_iC$, следовательно,

$$\frac{AE_i}{BE_i} = \frac{v_1}{v_2}.$$

Таким образом,

$$\sin\alpha_i = \frac{l}{L}\,\frac{v_1}{v_2}. \tag{1.56}$$

Подставляя числовые данные, находим

$$\sin\alpha_i = \frac{60}{400}\,\frac{16}{4} = 0{,}6$$

$$\alpha_1 = \arcsin 0{,}6 = 36^\circ 45',\ \alpha_2 = 180^\circ - \arcsin 0{,}6 = 143^\circ 45'.$$

При движении в направлениях, лежащих внутри угла E_1BE_2, человек достигнет шоссе раньше автобуса.

Минимальное значение скорости, при котором человек успеет на автобус, определяется условием того, что прямая AB является касательной к окружности, задающей возможные положения конца вектора

$\vec{v'}_2$. В этом случае $\vec{v}_2$ должен быть перпендикулярным к AB. В силу сказанного из $\triangle BF_0C$, находим

$$v_{\min} = v_1 \sin\gamma = v_1 \frac{l}{L} = 16 \cdot \frac{60}{400} \text{ м/с} = 2,4. \text{ м/с}$$

Тот же результат можно получить из условия разрешимости (1.56).

Ответ: $36°45' \leq \alpha \leq 143°45'$, $v_{\min} = 2,4$ м/с.

§ 5. Графическое представление движения

Для большей наглядности описания движения материальной точки используют графики зависимости кинематических характеристик от времени.

В качестве примера рассмотрим движение камня, брошенного вертикально вверх со скоростью v_0 с балкона, находящегося на высоте h от поверхности Земли.

Введем систему отсчета, связанную с Землей и началом на ее поверхности. Ось OX направим вертикально вверх.

С учетом

$$a_x = -g, \tag{1.57}$$

из (1.25–1.26) имеем:

$$v_x = v_0 - gt, \tag{1.58}$$

$$x = h + v_0 t - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.59}$$

Графиком функции (1.57) является прямая, параллельная оси абсцисс, проходящая через точку с координатами $(0, -g)$; (1.58) – прямая, отсекающая на осях абсцисс и ординат отрезки v_0/g и v_0, соответственно; (1.59) – парабола с вершиной $(v_0/g, v_0^2/2g)$, проходящая через точки $\left(0, \left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}\right)/g\right)$ и $(h, 0)$.

Конкретные кривые, построенные при $h = 25$ м и v_0 =20 м/с, представлены на рисунке 1.14, там же представлена зависимость от времени проекции вектора перемещения $s_x = x - h$ и пройденного камнем пути l. В качестве значения ускорения свободного падения принято $g = 10$ м/с^2. Для дополнительной наглядности графики размещены один под другим.

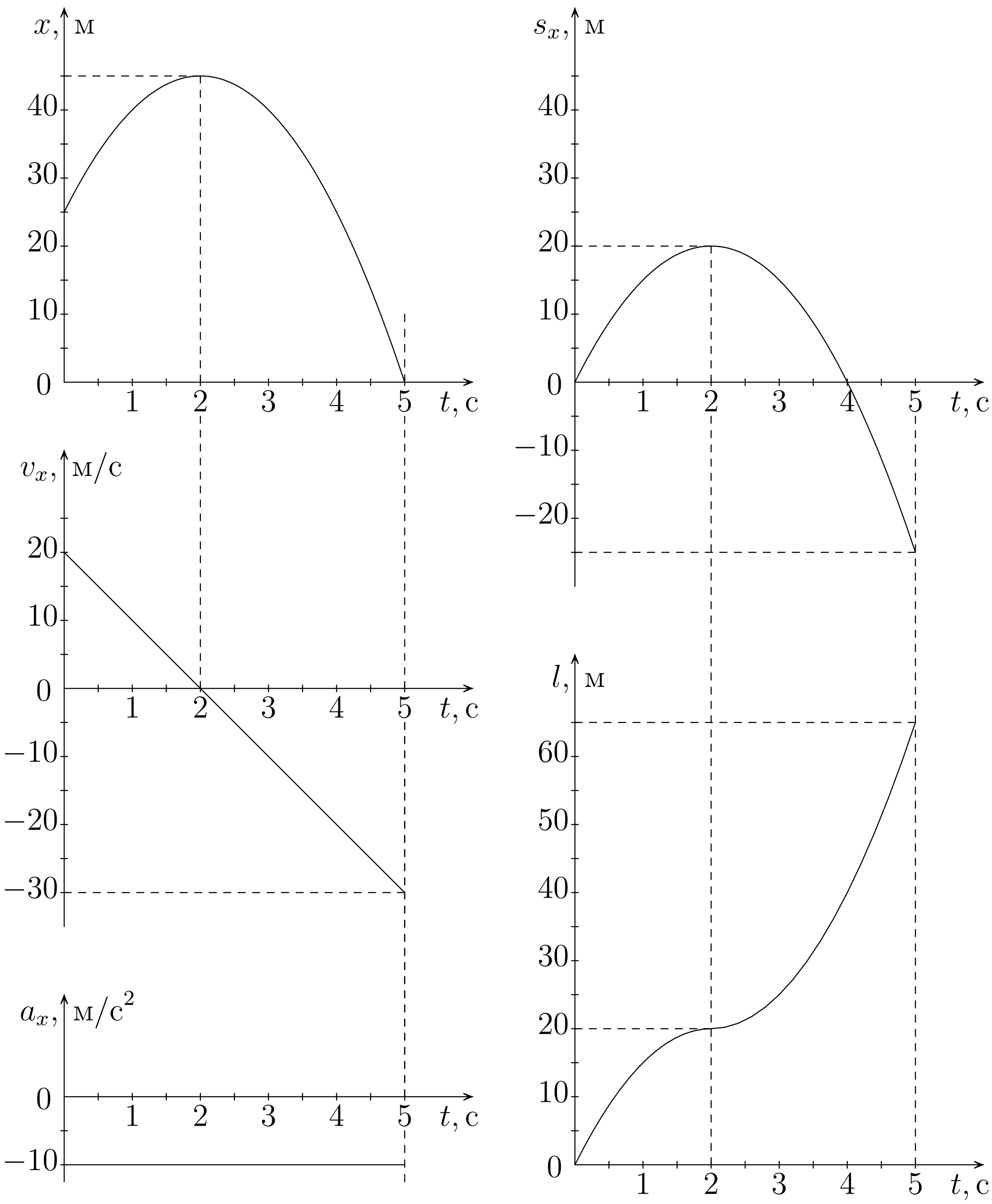


Рис. 1.14.

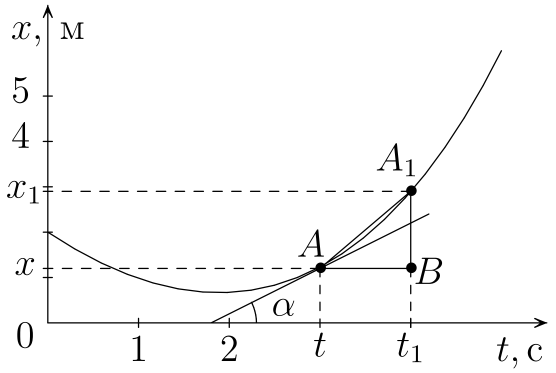


Рис. 1.15.

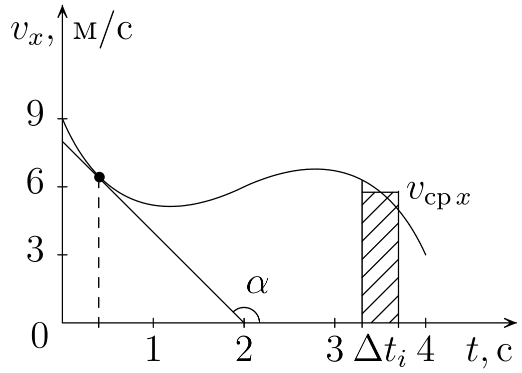


Рис. 1.16.

Перейдем к анализу свойств графиков движения.

Начнем с зависимости $x(t)$ (рис. 1.15).

Выберем два последовательных момента времени t и t_1. Как видно из рисунка, средняя скорость на данном этапе движения равна отношению отрезков BA_1 к AB, измеренных в указанных на соответствующих осях единицах. По мере уменьшения интервала времени хорда AA_1 стягивается в точку, при этом секущая AA_1 переходит в касательную, а средняя скорость – в мгновенную.

Таким образом, *мгновенная скорость пропорциональна тангенсу наклона касательной к графику зависимости координаты от времени*:

$$v_x = k \operatorname{tg} \alpha.$$

Коэффициент пропорциональности k, имеющий размерность скорости, равен отношению масштабов по оси ординат и абсцисс.

В представленном на рисунке случае

$$k = 2 \text{ м/с},\ \Delta t = 1 \text{ с},\ \Delta x = 1.3 \text{ м},\ \operatorname{tg} \alpha = 1/2.$$

Соответственно

$$v_{\text{ср}\,x} = 1{,}3 \text{ м/с}, \quad v = 1 \text{ м/с}.$$

Рассмотрим график зависимости $v_x(t)$ (рис. 1.16).

Повторяя рассуждения, аналогичные изложенным выше, приходим к выводу, что *ускорение пропорционально тангенсу наклона касательной к графику зависимости скорости от времени*:

$$a_x = k \operatorname{tg} \alpha.$$

В частности, тело, график скорости которого приведен на рисунке, в момент времени $t = 0,4$ с двигалось с ускорением $a_x = -4$ м/с^2.

Разобъем время движения на отдельные промежутки и рассмотрим один из них. Произведение $v_{\text{ср}\,x}{\cdot}\Delta t_i$ представляет собой приращение координаты x за данное время. С другой стороны, это площадь заштрихованного на рис. 1.16 прямоугольника. Общее изменение координаты тела равно сумме приращений на каждом интервале. Задавая все Δt_i достаточно малыми для того, чтобы пренебречь отличием средней скорости от мгновенной, приходим к выводу: что *приращение координаты тела равно площади под графиком зависимости скорости от времени* (рис. 1.17).

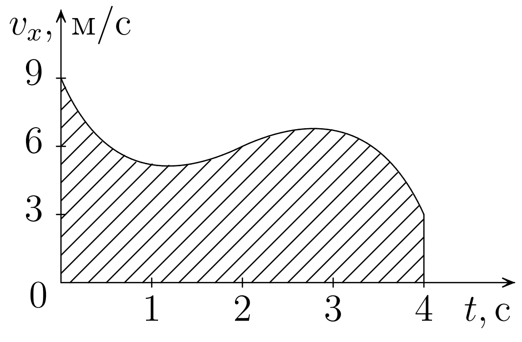


Рис. 1.17.

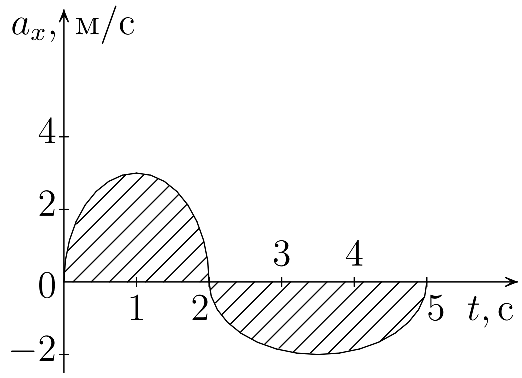


Рис. 1.18.

В данном процессе тело за 4 секунды переместилось вдоль оси OX на 18 метров.

Аналогично: *приращение скорости равно площади под графиком зависимости ускорения от времени.*

Так, в примере на рис. 1.18 общее изменение v_x равно нулю.

Пример решения задач.

Задача 19. На рисунке 1.19 представлен график зависимости скорости тела, движущегося вдоль оси OX, от времени. Найти скорость и ускорение этого тела к концу первой секунды его движения. Построить графики зависимости перемещения, пройденного пути и ускорения от времени. Вычислить, перемещение и путь, пройденные за последние две секунды.

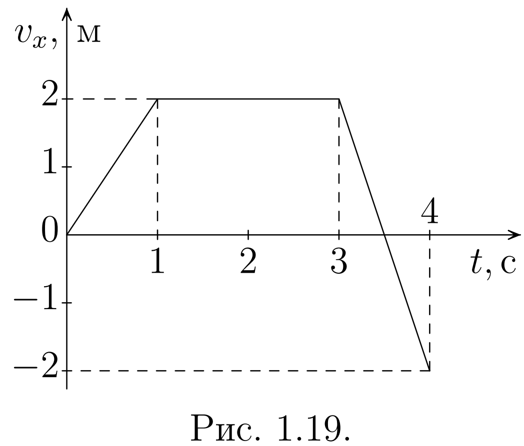


Рис. 1.19.

Решение.

В течение первой секунды тело двигалось равноускоренно. К концу указанного промежутка времени его скорость достигла значения $v_{1x} = 2$ м/с. Соответственно $a_{1x} = 2$ м/с^2. График зависимости перемещения и пройденного пути от времени представляет собой параболу, ускорения – прямую $a_{1x} = 2$ м/с^2.

В течение двух последующих секунд тело двигалось с постоянной скоростью. Зависимость перемещения и пройденного пути от времени изображается прямой линией с угловым коэффициентом $k = v_{1x}$, ускорения – прямой, совпадающей с осью абсцисс.

Последнюю секунду тело двигалось равноускоренно, уменьшая скорость за 0,5 с от 2 м/с до нуля, после чего оно изменило направление своего движения и в течение последующих 0,5 с v_x достигла значения -2 м/с. При этом перемещение на данном этапе оказалось равным нулю, а пройденный путь равен сумме пути в прямом и обратном направлениях. Графиком ускорения является прямая $a_x = -4$ м/с^2; перемещения – парабола; пройденного пути – две ветви парабол, первая из которых направлена вниз, вторая – вверх.

Перемещение за последние две секунды может быть определено как сумма (с учетом знака) площадей двух фигур: трапеции с основаниями 1 с и 1,5 с и высотой 2 м/с и треугольника с основанием 0,5 с и высотой -2 м/с. С учетом сказанного, $s_x = 2$ м. При подсчете пройденного пути следует складывать абсолютные величины указанных площадей, что дает $l = 3$ м.

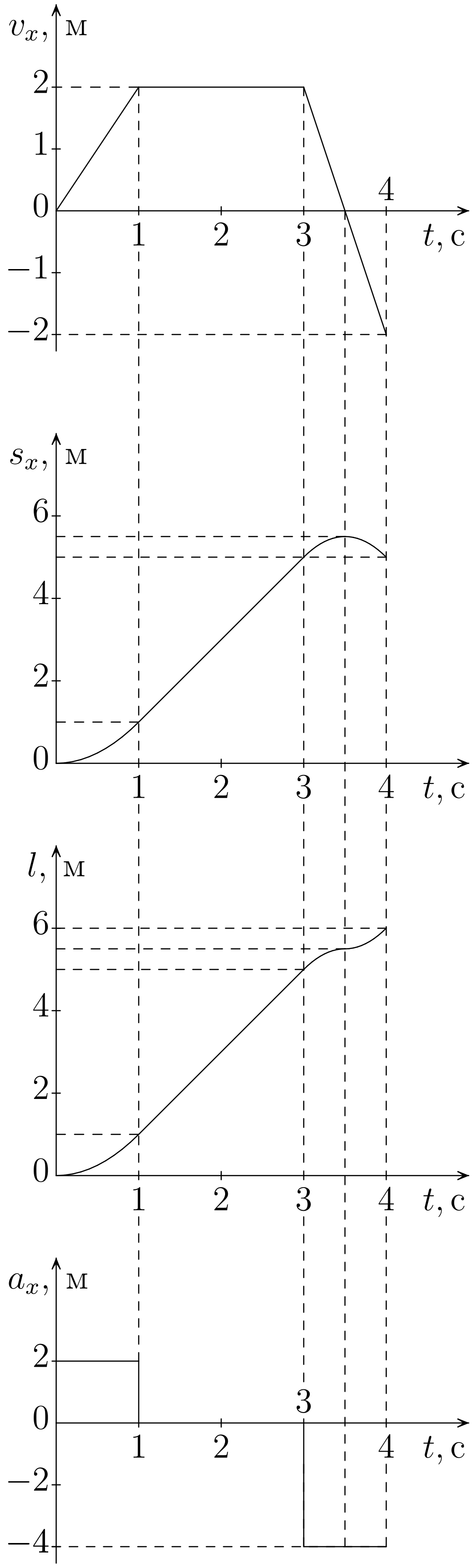


Рис. 1.20.

Ответ: $v_{1x} = 2$ м/с, $a_{1x} = 2$ м/с^2, $s_x = 2$ м, $l = 3$ м. Графики зависимости $s_x(t)$, $l(t)$ и $a_x(t)$ представлены на рис. 1.20.

Замечание. Если в задании не указаны числовые значения представленных величин, то при построении графиков можно ограничиться качественными соображениями. В случае равномерного прямолинейного движения ускорение равно нулю, графиком скорости является прямая, параллельная оси абсцисс, перемещения – прямая, угловой коэффициент которой тем больше, чем больше значение скорости. Для равноускоренного движения графиком ускорения является прямая, параллельная оси абсцисс, скорости – прямая, угловой коэффициент которой тем больше, чем больше значение ускорения, перемещения – парабола, ветви которой направлены вверх (вниз), если проекция ускорения положительна (отрицательна), с вершиной в точке, соответствующей моменту времени, когда скорость тела обращается в ноль.

Необходимо учитывать также, что в природе не существует процессов приводящих к мгновенному изменению скорости и ускорения тела. Поэтому в точках изменения характера движения зависимость указанных величин от времени должна оставаться непрерывной, а на графиках перемещения и пройденного пути не может быть изломов.

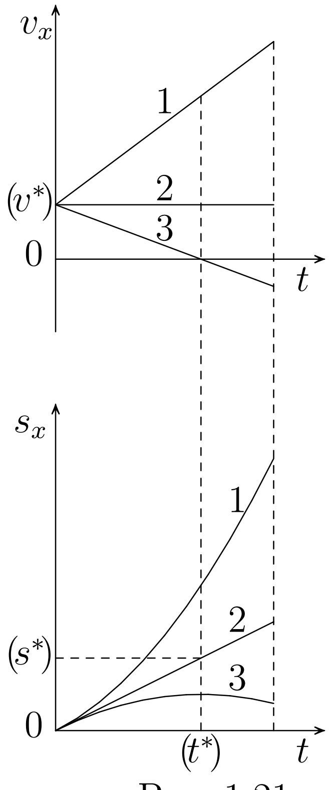


Рис. 1.21.

Для максимальной точности передачи количественных соотношений следует провести все необходимые рассуждения определяя масштаб через какие-либо наиболее характерные значения величин, представленных на исходном графике. Конкретный выбор определяется исключительно удобством дальнейших построений.

Например, если в случае, показанном на верхнем из рис. 1.21, в качестве единиц измерения принять v^*, t^*, $s^* = v^*t^*$ и $a^* = v^*/t^*$, то зависимость перемещения от времени для каждого из тел будет задаваться функциями

$$s_{1x} = s^* \frac{t}{t^*}\left(1 + \frac{t}{t^*}\right), \quad s_{2x} = s^* \frac{t}{t^*}, \quad s_{3x} = s^* \frac{t}{t^*}\left(1 - \frac{1}{2}\,\frac{t}{t^*}\right),$$

графики которых приведены на нижнем из рис. 1.21. Полагается, что указанных скобках значений, а также пунктирной линии, соответствующей перемещению второго тела в момент времени $t = t^*$, на чистовом варианте быть не должно.

II. Динамика

Динамика – *раздел механики, изучающий движение тел исходя из количественного описания их взаимодействия между собой.*

§ 1. Основные законы динамики

Основу динамики составляют три аксиомы, установленные на основании многочисленных наблюдений, опытов и теоретических исследований – законы Ньютона.

Первый закон отражает установленный Галилеем факт того, что «когда тело движется по горизонтальной плоскости не встречая никакого сопротивления движению, то … движение его является равномерным».

Обобщая это утверждение Ньютон дал следующую его формулировку: *всякое тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока и поскольку оно не принуждается приложенными силами изменить это состояние.*

Данный закон называют также **законом инерции**.

Инерцией называют *явление сохранения телом неизменности состояния покоя или равномерного и прямолинейного движения при отсутствии воздействия со стороны других тел.*

Необходимо учитывать, что закон инерции выполняется лишь в случае, если наблюдение ведется в системе отсчета, которую можно принять за неподвижную. Во времена Галилея и Ньютона этот факт считался самим собой разумеющимся и отдельно не оговаривался. Кроме того, имелось в виду только поступательное движение, при котором тело можно было рассматривать как материальную точку.

В современной терминологии **первый закон Ньютона** гласит: *если на материальную точку не действуют никакие силы или действие приложенных к ней сил взаимно компенсируются, то по отношению к инерциальной системе отсчета эта точка будет находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения.*

Инерциальными называют *системы отсчета, относительно которых тело сохраняет неизменным состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения при отсутствии воздействия со стороны других тел.*

Другими словами, **инерциальными** *называют такие системы отсчета, относительно которых выполняется закон инерции.*

Системы отсчета, относительно которых закон инерции не выполняется называют **неинерциальными**.

Из закона сложения ускорений (1.52) видно, что если тело движется равномерно и прямолинейно относительно некоторой системы отсчета, то оно будет двигаться равномерно и прямолинейно относительно любой другой системы, движущейся относительно первой поступательно с постоянной по величине и направлению скоростью. Следовательно, всякая система отсчета, движущаяся относительно инерциальной поступательно, равномерно и прямолинейно, также является инерциальной.

Преимуществом инерциальных систем отсчета перед неинерциальными состоит в том, что все физические законы в инерциальных системах отсчета одинаковы.

Значимость первого закона Ньютона в современном его понимании состоит в том, что он позволяет установить факт инерциальности рассматриваемой системы отсчета.

Заметим, также, что инерциальной может быть лишь система отсчета, связанная с телом на которое не действуют другие тела. Но, в силу всеобщего характера взаимодействия, таких тел не существует. Поэтому понятие инерциальной системы отсчета является научной абстракцией. Любая система отсчета, связанная с реальным телом, неинерциальна. Опуская вопрос об определении критерия того, насколько существенны эффекты обусловленные неинерциальностью выбранной системы отсчета и можно ли ими пренебречь при изучении рассматриваемого физического процесса отметим, что для решения подавляющего большинства практических задач инерциальной следует считать систему отсчета жестко связанную с Землей. В случаях требующих большей точности (например, в гироскопии) – с центром масс Земли и осями, направленными на далекие звезды. Еще меньше неинерциальность проявляется в системе отсчета связанной с Солнцем, центром галактики и т.п.

Согласно второго из сформулированных Ньютоном законов: «изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению, той прямой, по которой эта сила действует».

Количеством движения Ньютон называл величину, равную произведению массы m тела на вектор его скорости $\vec{v}$:

$$\vec{p} = m\vec{v}, \tag{2.1}$$

что соответствует принятому в настоящее время определению импульса.

Входящее в определение (2.1) значение m, называют инертной массой.

Инертная масса *представляет собой физическую величину, являющуюся мерой инертности тела.*

Инертностью *называют свойство тела, характеризующее его способность изменять скорость своего движения.*

В качестве единицы массы в СИ принимают килограмм (кг). Килограмм равен массе цилиндра высотой и диаметром 39 мм из платино-иридиевого сплава (90% Pt,10% Ir). С достаточной точностью можно считать, что массой 1 кг обладает 1 литр чистой воды.

Под изменением количества движения подразумевалась величина

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t} = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = m\vec{a}.$$

Таким образом,

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{2.2}$$

В дальнейшем мы будем пользоваться именно этой формой записи второго закона Ньютона[1].

В современной трактовке **второй закон Ньютона** гласит: *если на материальную точку действует сила $\vec{F}$, то точка получает по отношению к инерциальной системе отсчета такое ускорение $\vec{a}$, что произведение массы точки на это ускорение равно силе.*

Силой называют *векторную физическую величину, являющуюся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел, в результате чего тело приобретает ускорение или изменяет свою форму.*

За единицу силы в СИ принимают ньютон (Н). 1 Н – *сила, сообщающая телу массой* 1 кг *ускорение* 1 м/с^2:

$$1\ \text{Н} = 1\ \text{кг} \cdot 1\ \text{м/с}^2.$$

Если на материальную точку действует несколько сил, то ее ускорение равно векторной сумме ускорений, сообщаемых каждой из этих сил в отдельности.

[1] Исторической справедливости ради необходимо заметить, что сам Ньютон никогда свой закон в таком виде не записывал и нигде не употреблял понятие ускорения.

Данное утверждение называют **принципом независимости действия сил**.

Поэтому в общем случае под $\vec{F}$ в (2.2) необходимо понимать *величину, равную векторной сумме всех действующих на данную точку сил*, которую называют **равнодействующей силой**.

Область пространства, в каждой точке которого на тело действует определенная сила, называют **силовым полем**.

Силовое поле называют **стационарным**, *если силы не зависят от времени.*

Силовое поле, распределение сил которого изменяется с течением времени, называют **нестационарным**.

Силовое поле, силы в каждой точке которого одинаковы по величине и направлению, называют **однородным**.

Необходимо отметить, что массы тел и силы, действующие на них в конкретных физических процессах, могут быть определены независимо друг от друга. Значимость второго закона Ньютона состоит в том, что он позволяет по заданной массе тела и сил, на него действующих, определить ускорение и, при наличии соответствующего математического аппарата, уравнение движения рассматриваемого тела. В этом смысле уравнение (2.2) также принято называть уравнением движения.

Третий закон Ньютона гласит: *две материальные точки действует друг на друга с силами равными по величине и направленными в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки.*

Данная формулировка отличается от предложенной Ньютоном лишь конкретизацией линии действия сил и уточнением того, что речь идет о материальной точке.

Выясним, как представленные в современном понимании законы Ньютона, могут быть применены для описания реально существующих тел.

Отметим, что любое тело всегда может быть представлено в виде совокупности составляющих его частей, достаточно малых для того, чтобы считать каждую из них материальной точкой.

Рассмотрим произвольную систему материальных точек, которые условимся называть частицами.

Запишем уравнение (2.2) для какой-либо (k-той) частицы:

$$m_k\vec{a}_k = \sum_l \vec{F}_{kl}^{(i)} + \vec{F}_k^{(e)}. \tag{2.3}$$

Знак $\sum\limits_l$ означает суммирование по всем возможным значениям l, т.е.

$$\sum_l \vec{F}_{kl}^{(i)} = \vec{F}_{k1}^{(i)} + \vec{F}_{k2}^{(i)} + \cdots + \vec{F}_{kl}^{(i)} + \cdots$$

$\vec{F}_{kl}^{(i)}$ – сила, действующая на k-ю частицу со стороны l-й частицы этой системы, $\vec{F}_k^{(e)}$ – равнодействующая сил, действующих на k-ю частицу со стороны внешних по отношению к данной системе тел.

Сложим уравнения (2.3), записанные для всех возможных значений индекса k. В силу третьего закона Ньютона $\vec{F}_{lk}^{(i)} = -\vec{F}_{kl}^{(i)}$, поэтому сумма сил, действующих между частицами системы, равна нулю. Вводя обозначения

$$m = \sum_k m_k, \quad \vec{a}_c = \sum_k \frac{m_k \vec{a}_k}{m}, \tag{2.4}$$

имеем

$$m\vec{a}_c = \sum_k \vec{F}_k^{(e)}. \tag{2.5}$$

Полученное соотношение можно рассматривать как уравнение движения материальной точки, положение которой задается радиус-вектором

$$\vec{r}_c = \sum_k \frac{m_k \vec{r}_k}{m}, \tag{2.6}$$

а масса равна сумме масс всех частиц системы.

Геометрическую точку, положение которой определяется соотношением (2.6), *называют* **центром масс** (**центром инерции**) *рассматриваемой системы.*

Таким образом, *центр масс механической системы движется как материальная точка, масса которой равна суммарной массе этой системы, под действием всех внешних сил.*

Представленное утверждение называют **теоремой о движении центра масс системы**.

Именно данное обстоятельство позволяет при изучении поступательного движения любого тела, размеры которого малы по сравнению с расстояниями, которые оно проходит, рассматривать его как материальную точку.

По той же причине при описании поступательного движения действующие на тело силы принято изображать приложенными к его центру масс.

Вопросы для самоконтроля.

1. Сформулируйте законы Ньютона. Приведите примеры их проявления.
2. Что называют инерцией и инертностью? В чем различие этих понятий?
3. Какие системы называют инерциальными? Существуют ли строго инерциальные системы отсчета? Приведите примеры систем отсчета, которые можно принять в качестве инерциальных?
4. Что такое сила?
5. В каком смысле законы Ньютона, сформулированные для материальных точек, могут быть использованы для описания движения макроскопических тел.

§ 2. Силы в природе

Одной из наиболее значимых в механике сил является сила гравитационного взаимодействия.

Гравитационным *называют взаимодействие, обусловленное наличием у тел гравитационной массы.*

Гравитационная масса *представляет собой физическую величину, определяющую способность тела участвовать в гравитационном взаимодействии.*

На основании анализа астрономических наблюдений Ньютон сформулировал **закон всемирного тяготения**, согласно которому *между двумя любыми материальными точками действует сила притяжения, пропорциональная массе каждой из этих точек и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними*

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \tag{2.7}$$

Опыт (например, свободное падение) показывает, что ускорение, которое приобретает тело в результате действия сил гравитационного притяжения не зависит от его инертной массы. Это возможно лишь в случае, когда гравитационная и инертная масса тела пропорциональны между собой. По этой причине гравитационную и инертную массу считают равными и измеряют в одних и тех же единицах – килограммах. Необходимо подчеркнуть, что речь идет не о равенстве двух разных масс, а об одной физической величине, определяющей два самостоятельных физических явления.

Коэффициент G, численно равный силе гравитационного притяжения двух материальных точек, масса каждой из которых равна единице массы, находящихся на расстоянии, равном единице длины, называют **гравитационной постоянной**.

В системе СИ $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м^2/кг^2.

Закон всемирного тяготения выполняется и для тел конечных размеров, обладающих сферически симметричным распределение массы. При этом под r в (2.7) необходимо понимать расстояние между центрами симметрии этих тел. Указанное свойство обусловлено конкретным характером зависимости силы гравитационного взаимодействия между точками от расстояния между ними[2].

Особый интерес представляет рассмотрение силы гравитационного притяжения, действующей со стороны Земли на тело массой m, расположенное на высоте h от ее поверхности.

С достаточной для изучения большинства практически значимых явлений точностью несферичностью Земли можно пренебречь и рассматривать ее как шар массой $M_\oplus = 5,99 \cdot 10^{24}$ кг, радиусом $R_\oplus = 6,37 \cdot 10^6$ м. Также нет необходимости учитывать несимметричность распределения массы и конкретную форму тела. Сказанное позволяет считать условия применимости (2.7) выполненными, что дает

$$F_g = G\frac{mM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2}.$$

Ускорение, сообщаемое телу этой силой, определяется вторым законом Ньютона

$$a_g = G\frac{mM_\oplus}{(R_\oplus + h)^2}. \qquad (2.8)$$

[2]Для тех, кто знаком с электростатикой, напомним, что аналогичным свойством обладает и сила Кулона.

В непосредственной близости от поверхности Земли, т.е. при $h \ll R_\oplus$,

$$g = a_g(h = 0) = \frac{GM_\oplus}{R_\oplus^2} = 0.98 \text{ м/с}^2. \tag{2.9}$$

Необходимо отметить, что под ускорением свободного падения понимают величину, измеренную в системе отсчета, связанной с поверхностью Земли. Учет несферичности Земли и неинерциальности связанной с ее поверхностью системы отсчета, дает

$$g = 9,780318(1 + 0,005302 \sin\varphi - 0,000006 \sin^2 2\varphi) \text{ м/с}^2.$$

Здесь φ – географическая широта рассматриваемого места.

При решении задач (если не оговорено обратное) зависимостью g от φ можно пренебречь и считать $g = 10$ м/с^2, а для определения изменения g с удалением от поверхности Земли, пользоваться формулой

$$g = g_0 \left(\frac{R_\oplus}{R_\oplus + h}\right)^2,$$

где $g_0 = 10$ м/с^2.

В соответствии со вторым законом Ньютона

$$\vec{F}_{\text{тяж.}} = m\vec{g}. \tag{2.10}$$

Силу, действующую на материальную точку со стороны Земли и измеренную в системе отсчета, связанной с ее поверхностью, называют **силой тяжести**.

Сила тяжести максимальна на полюсах и минимальна на экваторе. Однако это различие не превышает 0.55%.

Силой тяжести тела *называют равнодействующую сил тяжести всех материальных точек, входящих в состав этого тела.*

Точку приложения силы тяжести, называют **центром тяжести тела**.

Можно доказать, что тяжести тела совпадает с его центр масс.

Состояние тела, движущегося только под действием сил гравитационного притяжения, называют **невесомостью.**

Силу, с которой тело вследствие гравитационного притяжения действует на опору или подвес, называют **весом**.

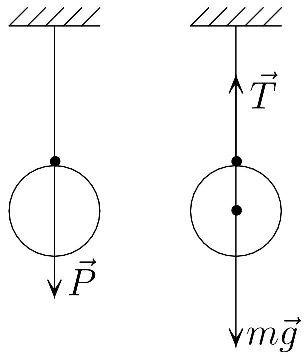


Рис. 2.1.

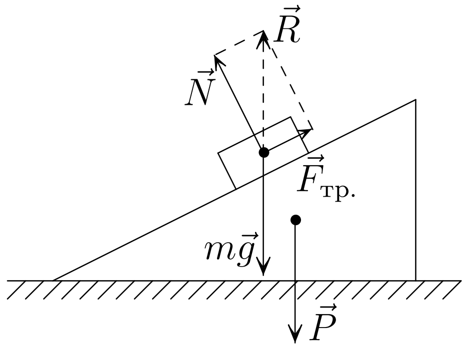


Рис. 2.2.

В отличии от силы тяжести, вес приложен не к телу, а к опоре или подвесу.

Согласно третьему закону Ньютона, вес тела равен по величине и противоположен по направлению силе, с которой опора или подвес действуют на данное тело.

Силу, действующую на тело со стороны подвеса, называют **силой натяжения.**

Сила натяжения $\vec{T}$ всегда направлена вдоль подвеса.

Силу, действующую на тело со стороны опоры, называют **силой реакции опоры.**

Сила реакции опоры складывается из двух составляющих

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}}.$$

Составляющую силы реакции, перпендикулярную плоскости соприкосновения рассматриваемого тела с опорой, называют **силой нормальной реакции.**

Силу, возникающую при соприкосновении двух тел и препятствующую их относительному перемещению вдоль поверхности соприкосновения, называют **силой трения**.

Сила натяжения и нормальной реакции обусловлены деформацией подвеса и опоры.

Деформацией *называют изменение размеров и (или) формы тела.*

Деформацию, которая исчезает после прекращения действия вызывающей ее силы, называют **упругой.**

Силу, возникающую при упругой деформации тела и направленную в сторону, противоположную направлению смещению частей этого тела, называют **силой упругости**.

Проведенные английским физиком Робертом Гуком (1635–1703) эксперименты по растяжению пружин, струн и тонких стержней показали, что *модуль силы упругости, возникающей при достаточно малой деформации тела, прямо пропорционален его удлинению*

$$F_{\text{упр.}} = k\Delta l. \tag{2.11}$$

Данное утверждение называют **законом Гука**, а коэффициент k – **жесткостью**. Единица жесткости – Н/м.

Сила упругости определяется электромагнитным взаимодействием протонов и электронов, из которых состоят атомы деформируемого тела.

Сила трения также имеет электромагнитную природу, но определяется взаимодействием между атомами соприкасающихся тел.

Силу трения, возникающую на границе соприкосновения тел при отсутствии их относительного перемещения, называют **силой трения покоя**.

Направление и величина силы трения покоя определяется из условия отсутствия движения соприкасающихся тел относительно друг друга.

Силу трения, возникающую при относительном перемещении соприкасающихся тел, называют **силой трения скольжения**.

Сила трения скольжения пропорциональна силе нормальной реакции

$$F_{\text{тр.}} = \mu N \tag{2.12}$$

и направлена в сторону, противоположную относительному движению того тела, к которому она приложена.

Коэффициент μ называют коэффициентом трения.

Вопросы для самоконтроля.

1. В чем состоит закон всемирного тяготения. Приведите примеры его проявления.

2. Чему равна сила тяжести, действующая на гирю массой 2 кг?

3. Что называют весом тела? В чем отличие веса от силы тяжести?

4. Что называют невесомостью? Приведите примеры.

5. Что называют силой натяжения подвеса и силой реакции опоры? Как они направлены?

6. Что называют силой упругости? От чего и как именно она зависит? Приведите примеры.

7. Что называют силой трения? От чего и как именно она зависит? Приведите примеры.

§ 3. Методика решения задач динамики

Успех решения задач по динамике зависит от грамотно выполненного чертежа, расстановки сил и оптимального выбора направления осей координат.

При построении чертежа не следует экономить место: чертеж должен быть понятным и наглядным, правильно отражать суть рассматриваемого физического явления.

При определении сил, действующих на тело, необходимо руководствоваться следующими правилами:

1. На чертеже не должно быть сил, природу происхождения которых нельзя указать.

2. Сила натяжения нити или растягиваемого стержня направлена вдоль этой нити или стержня.

3. Сила нормальной реакции направлена перпендикулярно поверхности соприкосновения тел.

4. Сила трения направлена в сторону, противоположную относительному движению того тела, к которому она приложена.

5. По возможности, желательно сохранять пропорции между соответствующими условию значениями сил и величинами векторов, их изображающих.

При выборе осей координат следует, если нет особых на то причин, одну из осей направлять в сторону движения тела.

3.1. Динамика прямолинейного движения

Задача 1. Найти ускорение тела массой 5 кг, если на него действует сила 3 Н.

Дано:
$m = 5$ кг
$F = 3$ Н
a – ?

Решение.

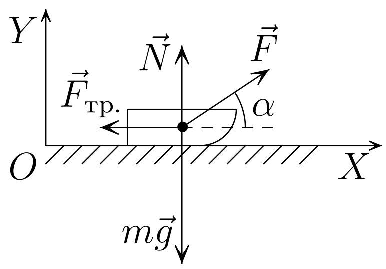
Из второго закона Ньютона (2.2) следует, что $\vec{a} = \dfrac{\vec{F}}{m}$. Отсюда

$$a = \frac{F}{m} = \frac{3\ \text{Н}}{5\ \text{кг}} = 0.6\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $a = 0.6$ м/с^2.

Задача 2. По горизонтальной дороге мальчик тянет санки массой 30 кг за веревку, направленную под углом 30° к плоскости дороги, с силой 100 Н. Определить силу трения и ускорение санок при коэффициенте трения равном 0,12 и 0.25.

Дано:
$m = 30$ кг
$F = 100$ Н
$\alpha = 30°$
$\mu_1 = 0{,}12$
$\mu_2 = 0{,}21$
a – ?



Решение.

Согласно второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}}.$$

Проецируя представленное уравнение на оси координат, получим

$$\begin{aligned} OX:&\quad ma = F\sin\alpha - F_{\text{тр.}}, \\ OY:&\quad\ \ 0\ = F\cos\alpha - mg + N. \end{aligned}$$

Отсюда,

$$N = mg - F\cos\alpha = 30 \cdot 10\,\text{кг м/с}^2 - 100\frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{Н} = 210\,\text{Н}.$$

В первом случае $\mu_1 N = 25\,\text{Н} < F\sin\alpha = 50\,\text{Н}$, следовательно

$$F_{\text{тр.}_1} = \mu_1 N = 25\,\text{Н}$$
$$a_1 = \frac{F\sin\alpha - F_{\text{тр.}_1}}{m} = \frac{50-25}{30}\,\frac{\text{Н}}{\text{кг}} = 0{,}8\,\text{м/с}^2.$$

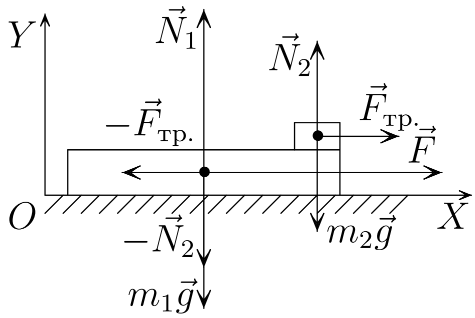
Во втором – $\mu_2 N = 52\,\text{Н} > F\sin\alpha$, т.е. сила трения покоя не достигнет максимального значения и будет определяться из условия $a_2 = 0$, что дает $F_{\text{тр.}_2} = F\sin\alpha = 50\,\text{Н}$.

Ответ: $a_1 = 0{,}8$ м/с^2, $F_{\text{тр.}_1} = 25\,\text{Н}$, $a_2 = 0$, $F_{\text{тр.}_2} = 50\,\text{Н}$.

Задача 3. Доска массой m_1 лежит на гладкой горизонтальной поверхности. На ней лежит брусок массой m_2. Коэффициент трения между доской и бруском μ. При каком значении силы F, приложенной к доске в горизонтальном направлении, брусок начнет скользить по доске. Через сколько времени он упадет с доски, если ее длина равна l.

Дано:
m_1
m_2
μ
l

a – ?



Решение.

Составим уравнения движения каждого из тел:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 - \vec{N}_2 - \vec{F}_{\text{тр.}},$$
$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{тр.}}.$$

Здесь учтено, что, в соответствии с третьим законом Ньютона, силы реакции $\vec{N}_2$ и $\vec{F}_{\text{тр.}}$, действующие со стороны доски на брусок, равны по величине и противоположны по направлению силам $-\vec{N}_2$ и $-\vec{F}_{\text{тр.}}$, с которыми брусок действует на доску.

Проецируя представленные уравнения на оси координат, получим

$$OX: \ m_1 a_1 = F - F_{\text{тр.}}, \tag{2.13}$$
$$m_2 a_2 = F_{\text{тр.}}, \tag{2.14}$$
$$OY: \quad N_2 = m_2 g. \tag{2.15}$$

Рассмотрим ситуацию, когда брусок движется вместе с доской без проскальзывания, т.е. при $a_1 = a_2 = a$. Из (2.13) и (2.14), находим

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2}.$$

С другой стороны, максимальное ускорение с которым может двигаться брусок, определяется условием

$$F_{\text{тр.}} \le \mu N_2,$$

что с учетом (2.15) и (2.14) дает

$$a_2 \le \mu g.$$

Таким образом, брусок будет скользить по доске при

$$F > \mu(m_1 + m_2)g.$$

В этом случае

$$a_1 = (F - \mu m_2 g)/m_1, \quad a_2 = \mu g.$$

Перейдем к определению времени, в течение которого брусок упадет с доски. За искомое время брусок пройдет путь

$$s_2 = \frac{\mu g t^2}{2},$$

а доска –

$$s_1 = s_2 + l = \frac{(F - \mu m_2 g)t^2}{2m_1}.$$

Отсюда находим

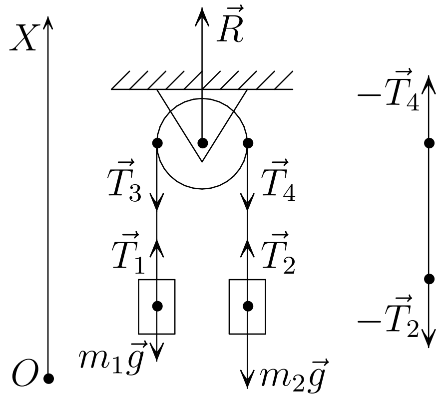
$$t = \sqrt{\frac{2lm_1}{F - \mu g(m_1 + m_2)}}.$$

Ответ: $F > \mu(m_1 + m_2)g$, $t = \sqrt{\dfrac{2lm_1}{F - \mu g(m_1 + m_2)}}$.

Задача 4. На концах нерастяжимой нити, перекинутой через блок с неподвижной осью, подвешены грузы, массами m_1 и m_2. Найти, ускорение каждого из грузов, силу натяжения нити и силу реакции, действующую на блок со стороны его оси. Массами нити и блока, а также силой трения в оси пренебречь.

Дано:
m_1
m_2

a_1, a_2,
T_1, T_2,
R – ?



Решение.

Запишем уравнения движения каждого из грузов:

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{T}_1 + m_1\vec{g},$$
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{T}_2 + m_2\vec{g}.$$

Проецируя представленные уравнения на ось OX, получим систему из двух уравнений относительно четырех неизвестных:

$$m_1 a_{1x} = T_1 - m_1 g, \quad m_2 a_{2x} = T_2 - m_2 g. \tag{2.16}$$

Для того, чтобы составить недостающие уравнения, рассмотрим перемещение каждого из грузов. В силу нерастяжимости нити $\Delta x_1 = -\Delta x_2$. Соответственно, $\Delta v_{1x} = -\Delta v_{2x}$ и $a_{1x} = -a_{2x}$. Полагая для определенности $m_1 > m_2$, запишем

$$a_{1x} = -a_{2x} = a.$$

Далее, рассмотрим часть нити, расположенную справа от блока. Согласно третьему закону Ньютона на нее действуют силы $-T_2$ и $-T_4$ со стороны груза массой m_2 и блока. По второму закону Ньютона движение этого участка нити задается уравнением

$$m\vec{a} = -\vec{T}_2 - \vec{T}_4.$$

Отсюда, с учетом условия пренебрежимой малости массы нити, имеем $T_2 = T_4$. Аналогично $T_1 = T_3$.

Также, но с использованием уравнения вращательного движения блока, изучение которого выходит за рамки школьного курса физики, можно показать, что $T_3 = T_4$.

Таким образом: $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T$.

С учетом сказанного (2.16) дает

$$m_1 a = T - m_1 g, \quad -m_2 a = T_2 - m_2 g.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}, \quad T = \frac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

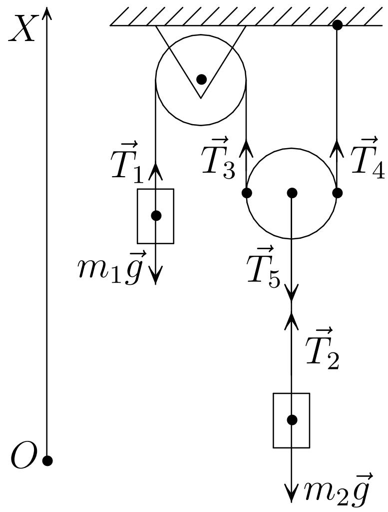
Сила реакции определяется из условия отсутствия поступательного движения блока:

$$R = 2T = \frac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}.$$

Ответ: $a_1 = a_2 = \dfrac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}$, $T_1 = T_2 = \dfrac{2m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$, $R = \dfrac{4m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$.

Замечание. Конкретные выкладки, приводящие к выводу о равенстве силы натяжения нити по всей ее длине, могут быть опущены. Тем не менее необходимо иметь ввиду и желательно оговаривать, что данный факт обусловлен пренебрежимой малостью масс и условием отсутствия трения.

Задача 5. Найти ускорение грузов массой $m_1 = 0,6$ кг и $m_2 = 0,5$ кг в системе, изображенной на рисунке. Массой блоков и нити, а также трением пренебречь. Нить считать нерастяжимой.



Дано:
$m_1 = 0,5$ кг
$m_2 = 0,6$ кг
a_1, a_2 – ?

Решение.

Запишем уравнения движения каждого из грузов в проекции на ось OX:

$$m_1 a_{1x} = T_1 - m_1 g, \quad m_2 a_{2x} = T_2 - m_2 g.$$

Рассмотрим перемещение каждого из грузов. В силу нерастяжимости нити $\Delta x_1 = -2\Delta x_2$, $\Delta v_{1x} = -2\Delta v_{2x}$, $a_{1x} = -2a_{2x}$. Как будет видно из дальнейших рассуждений, при заданном соотношении масс вектор ускорения первого груза направлен вниз, а второго – вверх. В соответствии со сказанным обозначим

$$a_{2x} = a, \quad a_{1x} = -2a.$$

Из условия пренебрежимой малости масс нити и блоков, а также отсутствия трения следует, что $T_1 = T_3 = T_4 = T$, $T_2 = T_5 = 2T$.

С учетом сказанного имеем:

$$-m_1 2a = T - m_1 g, \quad m_2 a = 2T - m_2 g.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

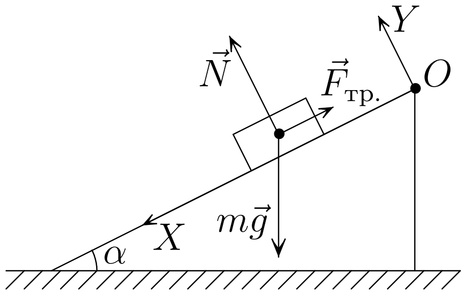
$$a_2 = \frac{(2m_1 - m_2)g}{m_2 + 4m_1} = \frac{(2\cdot 0,5 - 0,6)\cdot 10}{0,6 + 4\cdot 0,5}\ \text{м/с}^2 = 1,5\ \text{м/с}^2, \quad a_1 = 2a_2 = 3\ \text{м/с}^2.$$

Ответ: $a_1 = 3$ м/с^2, $a_2 = 1,5$ м/с^2.

Задача 6. Определить ускорение тела, соскальзывающего с плоскости, наклоненной под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Коэффициент трения принять равным: а) 0,5; б) 0,6.

Дано:
$\alpha = 30^\circ$
$\mu_1 = 0,5$
$\mu_2 = 0,6$

$a_1,\ a_2$ – ?



Решение.
Проецируя уравнение движения тела

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр.}}$$

на оси координат, имеем

$$OX: \quad ma = mg\sin\alpha - F_{\text{тр.}},$$
$$OY: \quad 0 = N - mg\cos\alpha.$$

Учитывая, что $F_{\text{тр.}} \le \mu N = \mu mg\cos\alpha$, находим

$$a = \begin{cases} g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) & \text{при} \quad \mu < \operatorname{tg}\alpha \\ 0 & \text{при} \quad \mu \ge \operatorname{tg}\alpha. \end{cases}$$

Подставляя числовые данные, получим

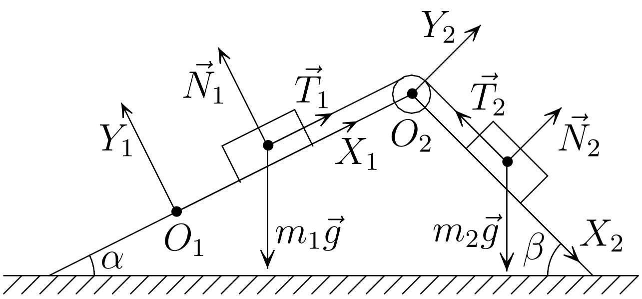
$$a_1 = 10\cdot\left(\frac{1}{2} - 0,5\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\ \text{м/с}^2 = 0,7\ \text{м/с}^2, \quad a_2 = 0.$$

Ответ: $a_1 = 0,7$ м/с^2, $a_2 = 0$.

Задача 7. Определить величину ускорения грузов, массами m_1 и m_2, связанных между собой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок. Плоскости, на которых лежат грузы составляют с горизонтом углы α и β соответственно. Трением, а также массой блока и нити, пренебречь.

Дано:
m_1
m_2
α
β

a – ?



Решение.
Составим уравнения движения каждого из грузов:

$$m_1\vec{a}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1 + \vec{N}_1,$$
$$m_2\vec{a}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2 + \vec{N}_2.$$

Спроецируем представленные уравнения на оси O_1X_1 и O_2X_2. Учитывая, что вследствие отсутствия трения и пренебрежимой малости масс нити и блока $T_1 = T_2 = T$, а в силу нерастяжимости нити $a_{1x_1} = a_{2x_2} = a$, имеем

$$O_1X_1: m_1a = T - m_1g\sin\alpha,$$
$$O_2X_2: m_2a = m_2g\sin\beta - T.$$

Отсюда

$$a = \frac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2}.$$

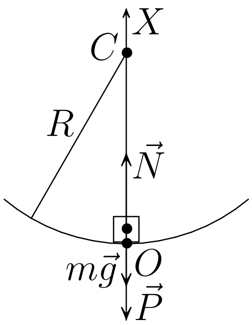
Ответ: $a = \dfrac{m_2 \sin\beta - m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2}$.

3.2. Движение по окружности

Задача 8. Определить вес лыжника массой 50 кг, движущегося со скоростью 10 м/с, в нижней точке вогнутого участка трассы с радиусом кривизны 20 м.

Дано:
$m = 50$ кг
$v = 10$ м/с
$R = 20$ м

P – ?



Решение.

Согласно третьему закону Ньютона

$$\vec{P} = -\vec{N}.$$

Проецируя уравнение движения лыжника

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

на направление оси OX и учитывая, что $a_x = \dfrac{v^2}{R}$, получим

$$m\frac{v^2}{R} = N - mg.$$

Отсюда

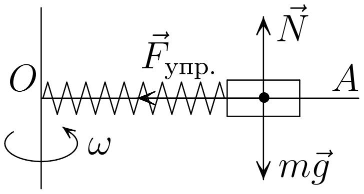
$$P = N = m\left(g + \frac{v^2}{R}\right) = 50 \cdot \left(10 + \frac{10^2}{20}\right) \text{ Н} = 750 \text{ Н}.$$

Ответ: $P = 750$ Н.

Задача 9. Горизонтальная прямая штанга OA вращается вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью ω. По штанге без трения может скользить тело массы m, прикрепленное к оси пружиной жесткостью k длиной в недеформированном состоянии l_0. Определить удлинение пружины.

Дано:
ω
m
k
l_0

Δl – ?



Решение.

Из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр.}}$$

с учетом того, что $m\vec{g} = -\vec{N}$, $a = \omega^2(l_0 + \Delta l)$, $F_{\text{упр.}} = k\Delta l$, имеем

$$m\omega^2(l_0 + \Delta l) = k\Delta l.$$

Отсюда

$$\Delta l = \frac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}.$$

Ответ: $\Delta l = \dfrac{m\omega^2 l_0}{k - m\omega^2}$.

Замечание. Полученный результат справедлив для $\omega \ll \sqrt{k/m}$, т.к. при больших растяжениях закон Гука перестанет выполняться.

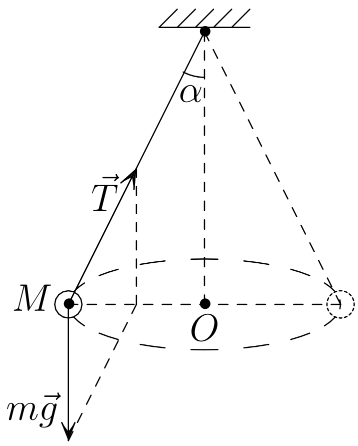
Задача 10. Сколько оборотов в секунду делает шарик на нити длиной 0,3 м, движущийся в горизонтальной плоскости по окружности радиусом 0,15 м (конический маятник).

Дано:
$l = 0,3$ м
$R = 0,15$ м

n – ?

Решение.

Для определения искомого числа оборотов необходимо вычислить линейную или, что проще, угловую скорость движения шарика.



Согласно второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}.$$

Как видно из рисунка

$$ma = |m\vec{g} + \vec{T}| = mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Отсюда, с учетом того, что

$$n = \frac{\omega}{2\pi}, \quad a = \omega^2 R, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2 - R^2}},$$

находим

$$\nu = \frac{\sqrt{g}}{2\pi\sqrt[4]{l^2 - R^2}} = \frac{\sqrt{10}}{2\pi\sqrt[4]{0,3^2 - 0,15^2}} \text{ об./с} = 1 \text{ об./с}. \qquad (2.17)$$

Ответ: $n = 1$ об./с.

Задача 11. Найти радиус орбиты искусственного спутника, который движется в плоскости экватора так, что все время находится в зените одной и той же точки земного шара.

Прежде чем приступать к решению, заметим, что спутник будет оставаться над заданной точкой только в том случае, если он имеет тот же период обращения, что и Земля.

Дано:	**Решение.**
$T = 24{\cdot}60{\cdot}60$ с $= 86400$с	Согласно второму закону Ньютона
R – ?	$m\vec{a} = \vec{F}.$

Единственной силой, действующей на спутник, является сила притяжения к Земле:

$$F = G\frac{M_\oplus m}{R^2}.$$

Она и сообщает ему центростремительное ускорение

$$a = \frac{v^2}{R}.$$

В соответствии со сказанным, имеем

$$m\frac{v^2}{R} = G\frac{M_\oplus m}{R^2}.$$

Отсюда, с учетом

$$v = \frac{2\pi R}{T},$$

находим

$$R = \sqrt[3]{\frac{GM_\oplus T^2}{4\pi^2}}.$$

Вспоминая (см. формулу (2.9) на стр. 50), что

$$GM_\oplus = gR_\oplus^2, \tag{2.18}$$

представим полученный результат в более удобном виде

$$R = \sqrt[3]{\frac{gR_\oplus^2 T^2}{4\pi^2}} = \sqrt[3]{\frac{9,8{\cdot}\left(6,4{\cdot}10^6\right)^2\left(8,6{\cdot}10^4\right)^2}{4\pi^2}}\ \text{м} = 4,2{\cdot}10^7\ \text{м}.$$

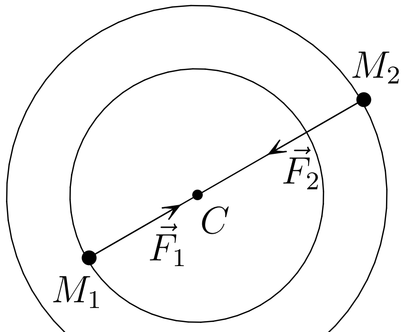
Ответ: $R = 42000$ км.

Задача 12. Чему равно расстояние между двумя звездами массой m_1 и m_2, если они движутся по круговым орбитам вокруг общего центра масс с периодом T.

Дано:
m_1
m_2
T
l – ?

Решение.

Обозначим расстояние M_iC (i=1, 2) от каждой из звезд до их общего центра масс C через r_i. В силу определения (2.6) $m_1r_1 = m_2r_2$. С другой стороны $r_1 + r_2 = l$. Отсюда имеем



$$m_ir_i = \frac{m_1m_2l}{m_1 + m_2}. \qquad (2.19)$$

Из уравнения движения каждой из звезд $m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i$, с учетом (2.19) и того, что $a_i = \omega^2 r_i$, $\omega = 2\pi/T$, $F_1 = F_2 = Gm_1m_2/l^2$, находим

$$l = \sqrt[3]{\frac{G(m_1 + m_2)T^2}{4\pi^2}}.$$

Ответ: $l = \sqrt[3]{\frac{G(m_1 + m_2)T^2}{4\pi^2}}$.

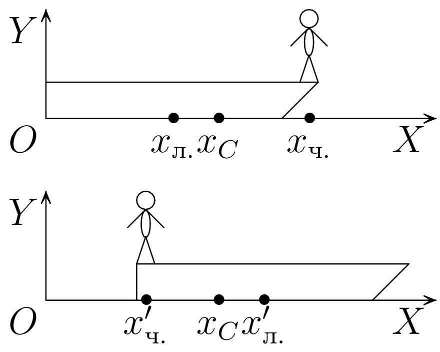
3.3. Приложение теоремы о движение центра масс

Задача 13. Человек, находящийся в лодке, переходит с носа на корму. На какое расстояние переместится лодка, если в начальный момент времени она покоилась относительно берега? Масса человека 60 кг. Масса и длина лодки 120 кг и 3 м соответственно. Сопротивлением воды пренебречь.

Дано:
$m_{\text{ч.}} = 60$ кг
$m_{\text{л.}} = 120$ кг
$L = 3$ м
l – ?

Решение.

Из условия пренебрежимой малости сопротивления воды следует, что положение центра масс системы лодка-человек относительно берега остается неизменным.



Согласно определению (2.6)

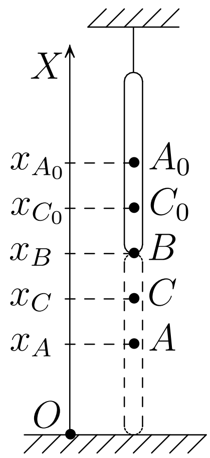
$$x_C = \frac{m_{\text{ч.}} x_{\text{ч.}} + m_{\text{л.}} x_{\text{л.}}}{m_{\text{ч.}} + m_{\text{ч.}}} = \frac{m_{\text{ч.}} x'_{\text{ч.}} + m_{\text{л.}} x'_{\text{л.}}}{m_{\text{ч.}} + m_{\text{ч.}}}.$$

Отсюда, учитывая, что $x'_{\text{ч.}} = x_{\text{ч.}} - L + l$, $x'_{\text{л.}} = x_{\text{л.}} + l$, находим

$$l = \frac{m_{\text{ч.}} L}{m_{\text{ч.}} + m_{\text{л.}}} = \frac{60 \cdot 3}{60 + 120}\ \text{м} = 1\ \text{м}.$$

Ответ: $l = 1$ м.

Задача 14. На дне плотно закрытой пробирки, подвешенной над столом на нити, сидит муха, масса которой равна массе пробирки, а расстояние от дна до поверхности стола равно длине пробирки l. Нить пережигают и за время падения пробирки муха перелетает со дна в верхний конец пробирки. Определить время, за которое пробирка достигнет стола.



Дано:	**Решение.**
$m_1 = m_2$ l	Центр масс системы пробирка-муха движется как свободно падающее тело. Следовательно зависимость его положения от времени задается уравнением
t – ?	

$$x_C = x_{C_0} - \frac{gt^2}{2}.$$

В силу определения (2.6) и равенства масс

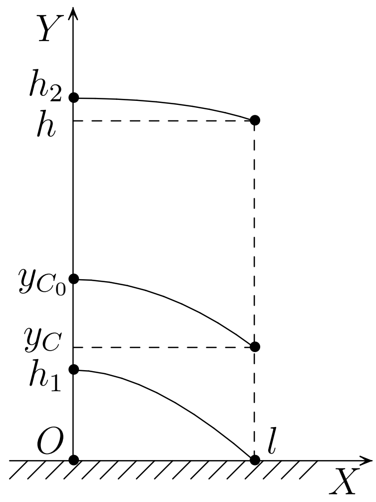
$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{x_A + l}{2}, \quad x_{C_0} = \frac{x_{A_0} + x_B}{2} = \frac{x_A + 2l}{2}.$$

Отсюда находим $t = \sqrt{l/g}$.

Ответ: $t = \sqrt{l/g}$.

Задача 15. Два шарика массами m_1 и m_2, зарядом q_1 и q_2, находящихся на одной вертикали на высоте h_1 и h_2, бросили одновременно в горизонтальном направлении с одинаковой скоростью v_0. Первый шарик коснулся земли на расстоянии l от вертикали бросания. На какой высоте h был в этом момент второй шарик?

Дано:	**Решение.**
m_1, m_2	Центр масс рассматриваемой системы движется как тело, брошенное горизонтально со скоростью v_0. Зависимость его координат от времени определяется соотношениями
q_1, q_2	
h_1, h_2	
l	
h – ?	



$$x_C = v_0 t, \quad y_C = y_{C_0} - \frac{gt^2}{2},$$

где

$$y_{C_0} = \frac{m_1 h_1 + m_2 h_2}{m_1 + m_2}.$$

Учитывая, что в момент падения первого шарика на землю, т.е. при $t = l/v_0$, центр масс находился на высоте

$$y_C = y_{C_0} - \frac{gl^2}{2v_0^2},$$

находим

$$h = \frac{m_1 + m_2}{m_2} y_C = \frac{m_1}{m_2} h_1 + h_2 - \left(\frac{m_1}{m_2} + 1\right) \frac{gl^2}{2v_0^2}.$$

Ответ: $h = \dfrac{m_1}{m_2} h_1 + h_2 - \left(\dfrac{m_1}{m_2} + 1\right) \dfrac{gl^2}{2v_0^2}$.

§ 4. Импульс. Закон сохранения импульса

В предыдущем параграфе были разобраны примеры движения под действием постоянных по величине сил. Изучение явлений, в которых силы взаимодействия между телами изменяются с течением времени, требует привлечения математического аппарата, выходящего за рамки школьного курса. Тем не менее, в ряде случаев вообще не возникает необходимости детального описания рассматриваемого процесса. Решение данного рода задач может быть получено из общих фундаментальных принципов. К таковым относится закон сохранения импульса.

Импульсом (**количеством движения**) *называют физическую величину, являющуюся мерой механического движения, равную для материальной точки произведению ее массы на скорость.*

Импульс механической системы равен сумме импульсов всех ее частей, или, что эквивалентно, произведению массы всей системы на скорость ее центра масс.

Если на тело, массой m в течение интервала времени Δt действует постоянная по величине и направлению сила $\vec{F}$, то изменение его импульса $\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$ определяется соотношением

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t. \tag{2.20}$$

Физическую величину, равную произведению силы на время ее действия, называют **импульсом силы**.

Таким образом, *изменение импульса тела равно импульсу действующих на него сил.* Данное утверждение представляет собой наиболее общую формулировку второго закона Ньютона.

В случае переменной силы под Δt необходимо понимать достаточно малый интервал времени. Условие малости определяется требованием того, чтобы изменением силы за это время можно было пренебречь. При этом изменение импульса за конечный промежуток времени определяется суммой его приращений на каждом из отдельных интервалов.

Уравнение (2.20) справедливо и для системы тел. При этом в качестве $\vec{p}$ и $\vec{F}$ следует рассматривать сумму импульсов всех ее частей и внешних сил, на них действующих.

Особый интерес представляет рассмотрение **замкнутых систем**.

Замкнутой *называют систему тел, не взаимодействующих с телами к ней не принадлежащими.*

Из (2.20) следует, что *импульс замкнутой системы тел в процессе ее движения остается неизменным.* Данное утверждение называют **законом сохранения импульса**.

Указанный закон справедлив и для системы, сумма внешних сил, действующих на тела которой, равна нулю. Такую системы формально можно рассматривать как замкнутую.

Закон сохранения импульса применим и при описании быстро протекающих процессов, если изменение импульса системы за рассматриваемый интервал времени пренебрежимо мало, а также в случае, когда сумма проекций внешних сил на какое-либо направление равна нулю.

Вопросы для самоконтроля.

1. Что называют импульсом материальной точки и механической системы?

2. Чем определяется изменение импульса тела и системы тел?

3. В чем состоит закон сохранения импульса? Приведите примеры его проявления.

Примеры решения задач.

Задача 16. Найти импульс тела массой 5 кг, движущегося со скоростью 2 м/с.

Дано:	Решение.
$m = 5$ кг	
$v = 2$ м/с	$p = mv = 5 \cdot 2$ кг $\cdot$ м/с $= 10$ кг $\cdot$ м/с.
p – ?	

Ответ: $p = 10$ кг $\cdot$ м/с.

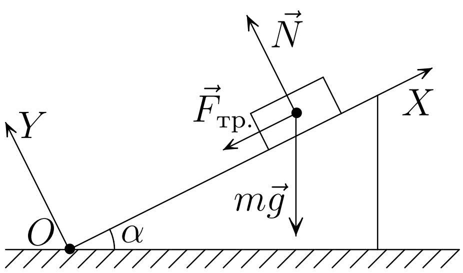
Задача 17. Металлический шарик массой 20 г, падающий со скоростью 5 м/с, ударяется о стальную плиту и отскакивает от нее с той же по величине и обратной по направлению скоростью. Определить среднюю силу, действующую на шарик во время соударения, если оно длилось 0,1 с.

Дано:	СИ	Решение.
$m = 20$ г	=0,02 кг	
$v = 5$ м/с		
$t = 0,1$ с		$F_{ср}=\dfrac{\Delta p}{t}=\dfrac{mv-(-mv)}{t}=\dfrac{2mv}{t}=\dfrac{2\cdot 0{,}02\cdot 5}{0{,}1}$ Н=2 Н.
$F_{ср}$ – ?		

Ответ:$F_{ср} = 2$ Н.

Задача 18. Шайбу бросили со скоростью v_0 вдоль плоскость, наклоненной под углом α к горизонту. Через какое время скорость шайбы станет равной нулю, если коэффициент трения шайбы о плоскость μ.

Дано:
v_0
α
μ
t – ?



Решение.
Изменение импульса шайбы определяется уравнением

$$\Delta\vec{p} = \left(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{тр.}\right),$$

проекция которого на оси координат дает

$$OX : \Delta p_x = -(mg\sin\alpha - F_{тр.})t,$$
$$OY : \Delta p_y = (N - mg\cos\alpha)t.$$

Отсюда, с учетом того, что

$$\Delta p_x = -mv_0, \quad \Delta p_y = 0, \quad F_{\text{тр.}} = \mu N,$$

находим

$$t = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}.$$

Ответ: $t = \dfrac{v_0}{g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}$.

Задача 19. Тело массой m, имеющее начальную скорость v_0, попадает в вязкую среду, сила сопротивления движению тела в которой пропорциональна его скорости: $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$, где α – известный коэффициент. Определить путь, пройденный телом до остановки.

Дано:
m
v_0
$\vec{F} = -\alpha\vec{v}$

l – ?

Решение.

Рассмотрим изменение импульса тела за достаточно малый промежуток времени Δt_i:

$$\Delta\vec{p}_i = \vec{F}\Delta t_i = -\alpha\vec{v}\Delta t_i.$$

Проецируя полученное соотношение на направление движения и учитывая, что произведение $v\Delta t_i$ представляет собой путь l_i, пройденный телом за указанное время, находим

$$l = \sum l_i = -\frac{1}{\alpha}\sum \Delta p_i = -\frac{\Delta p}{\alpha} = \frac{mv_0}{\alpha}.$$

Ответ: $l = mv_0/\alpha$.

Задача 20. Железнодорожная платформа с установленным на ней артиллерийским орудием движется по горизонтальному пути со скоростью v_0. Из орудия производят выстрел под углом α к горизонту в направлении движения платформы. Определить скорость платформы после выстрела, если скорость снаряда относительно платформы u. Масса платформы с орудием M, масса снаряда m.

Дано:
v_0
α
u
M
m

v – ?

Решение.

На систему платформа-снаряд действуют только сила тяжести и нормальной реакции, направленные вертикально, поэтому горизонтальная составляющая импульса системы остается неизменной. Учитывая, что до выстрела $\vec{p}_0 = (M+m)\vec{v}_0$, а после – $\vec{p} = M\vec{v} + m(\vec{v}+\vec{u})$, имеем

$$(M+m)v_0 = Mv + m(v - u\cos\alpha).$$

Отсюда находим

$$v = v_0 - \frac{mu\cos\alpha}{M+m}.$$

Ответ: $v = v_0 - mu\cos\alpha/(M+m)$.

§ 5. Энергия, работа, мощность. Теорема об изменении кинетической энергии. Закон сохранения энергии

Другой сохраняющейся величиной является энергия.

Энергией *называют общую количественную меру движения и взаимодействия всех физических объектов.*

Энергия не возникает из ничего и не исчезает. Она может только переходить из одной формы в другую. Понятие энергии связывает воедино все явления природы.

Физическую величину, равную изменению энергии тел в процессе их силового взаимодействия, называют **работой**.

Работа постоянной силы при прямолинейном перемещении точки ее приложения, равна скалярному произведению этой силы на перемещение:

$$A = \vec{F}\Delta\vec{s}. \tag{2.21}$$

Напомним, **скалярным произведением** *векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними, или, что эквивалентно, сумме произведений их одноименных координат*:

$$\vec{a}\,\vec{b} = a\,b\cos\left(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}\right) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \tag{2.22}$$

Единица работы – джоуль (Дж). 1 Дж – *работа, совершаемая силой* 1 Н *при перемещении точки ее приложения на* 1 м:

$$1 \text{ Дж} = 1 \text{ Н} \cdot 1 \text{ м}.$$

В общем случае работу силы определяют как сумму элементарных работ

$$\Delta A = \vec{F}\Delta\vec{r}, \tag{2.23}$$

вычисленных на достаточно малых участках траектории точки ее приложения. Условие малости определяется требованием того, чтобы изменением силы на каждом из участков и их кривизной можно было пренебречь.

Если к телу приложено несколько сил, то общая их работа равна сумме работ, совершаемых отдельными силами.

Физическую величину, равную работе, совершаемой в единицу времени, называют **мощностью**.

По определению

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \vec{F}\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}\vec{v}. \tag{2.24}$$

В системе СИ мощность измеряют в – *ваттах* Вт.

$$1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}.$$

В технике используется также единица мощности, введенная английским физиком Джеймсом Уаттом – *лошадиная сила* (л.с.). 1 л.с. = 746 Вт.

Выясним, как связаны между собой работа силы и изменение в результате ее действия скорости материальной точки массой m.

По определению, перемещение в выражении (2.23) должно быть настолько малым, что изменением силы можно пренебречь и считать движение рассматриваемой материальной точки равноускоренным. Отсюда, с учетом второго закона Ньютона и вытекающего из (1.27)

$$\vec{F}\Delta\vec{r} = m\vec{a}\vec{\Delta}r = m(a_x\Delta x + a_y\Delta y + a_z\Delta z) =$$
$$= m\left(\frac{\Delta v_x^2}{2} + \frac{\Delta v_y^2}{2} + \frac{\Delta v_z^2}{2}\right) = m\frac{\Delta v^2}{2},$$

имеем

$$\Delta A = \Delta\frac{mv^2}{2}.$$

Учитывая, что работа силы на конечном перемещении равна сумме элементарных работ на каждом из участков траектории, находим

$$A = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \tag{2.25}$$

Здесь v_1 и v_2 – начальное и конечное значения величины скорости рассматриваемой точки.

Величину

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \tag{2.26}$$

называют **кинетической энергией**.

Кинетическая энергия *материальной точки представляет собой физическую величину, равную работе, которую надо совершить, для того, чтобы сообщить этой точке данную скорость.*

Кинетическая энергия тела равна сумме кинетических энергий всех материальных точек, входящих в его состав.

Как и работа, кинетическая энергия измеряется в джоулях.

Изменение кинетической энергии системы тел (материальных точек) равно сумме работ всех действующих на тела этой системы сил:

$$\Delta E_k = E_{k2} - E_{k1} = A. \tag{2.27}$$

Данное утверждение называют **теоремой об изменении кинетической энергии**.

Перейдем к определению работы рассмотренных ранее сил.

Начнем с силы тяжести.

Пусть тело m двигаясь вдоль заданной кривой перемещается из точки A в B (рис. 2.3). Выделим достаточно малый участок траектории CD. Элементарная работа силы $m\vec{g}$ на этом участке

$$\Delta A = m\vec{g}\Delta\vec{r} = mg\Delta h.$$

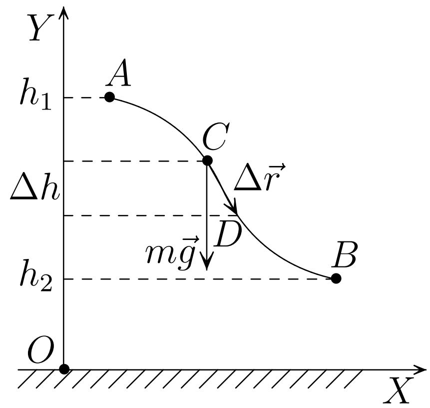


Рис. 2.3.

Суммируя элементарные работы на каждом из участков траектории, находим

$$A = mg(h_1 - h_2). \tag{2.28}$$

Таким образом, *работа силы тяжести не зависит от траектории движения тела и равна произведению величины этой силы на разность высот начального и конечного положения.*

Силы, работа которых зависит только от начального и конечного положения тела, называют **консервативными**.

Из приведенного определения следует, что работа консервативной силы по любой замкнутой траектории равна нулю.

Заметим, что понятие консервативности применимо лишь при условии стационарности распределения сил.

Работа любой консервативной силы может быть представлена в виде взятого с обратным знаком изменения потенциальной энергии тела при его переходе из начального в конечное положение:

$$A = -\Delta E_p = -(E_{p2} - E_{p1}). \tag{2.29}$$

Потенциальной энергией *тела в заданной точке называют величину, равную работе, которую совершает потенциальная сила при перемещении тела из этой точки в ту, где потенциальная энергия принимается равной нулю.*

Единица потенциальной энергии – джоуль.

Точка, в которой потенциальная энергия полагается равной нулю, выбирается так, чтобы максимально упростить описание рассматриваемого явления.

При вычислении работы силы тяжести за ноль обычно принимают потенциальную энергию тела, находящегося на поверхности Земли. В этом случае

$$E_p = mgh. \tag{2.30}$$

Отметим, что область применимости полученного выражения ограничена значениями h, при которых силу тяжести можно считать постоянной, т.е. пренебрежимо малыми по сравнению с радиусом Земли. Для бо́льших высот необходимо использовать закон всемирного тяготения.

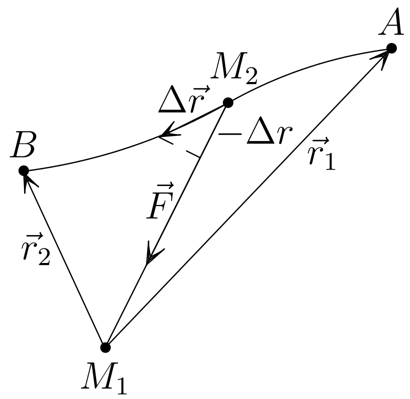


Рис. 2.4.

Рассмотрим две материальные точки массами m_1 и m_2 (рис., 2.4). Зафиксируем одну из них и вычислим работу, которую совершает сила гравитационного притяжения при перемещении другой вдоль кривой AB.

Из рисунка видно, что

$$\vec{F}\Delta\vec{r} = F(-\Delta r).$$

Соответственно,

$$\Delta A = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\Delta r.$$

Отсюда, учитывая, что для малых значений Δr

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r+\Delta r} - \frac{1}{r} = -\frac{\Delta r}{(r+\Delta r)r} \approx -\frac{\Delta r}{r^2},$$

находим

$$\Delta A = -\Delta\left(-G\frac{m_1 m_2}{r}\right).$$

Как и в случае силы тяжести, элементарная работа зависит только от расстояния между точками, следовательно, сила всемирного тяготения также консервативна.

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия двух материальных точек массой m_1 и m_2, находящихся на расстоянии r друг от друга, определяется соотношением

$$E_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{2.31}$$

Вычислим работу силы упругости при удлинении пружины жесткости k от некоторого значения x_1 до x_2 (рис. 2.5).

Рассмотрим работу

$$\Delta A = F_{\text{упр}.x}\Delta x$$

на интервале Δx достаточно малом для того, чтобы считать силу упругости в его пределах постоянной. С геометрической точки зрения произведение $F_{\text{упр}.x}\Delta x$ представляет собой площадь прямоугольника высотой $F_{\text{упр}.x}$ и шириной Δx. Соответственно, общая работа равна площади под графиком зависимости $F_{\text{упр}.x}$ от x:

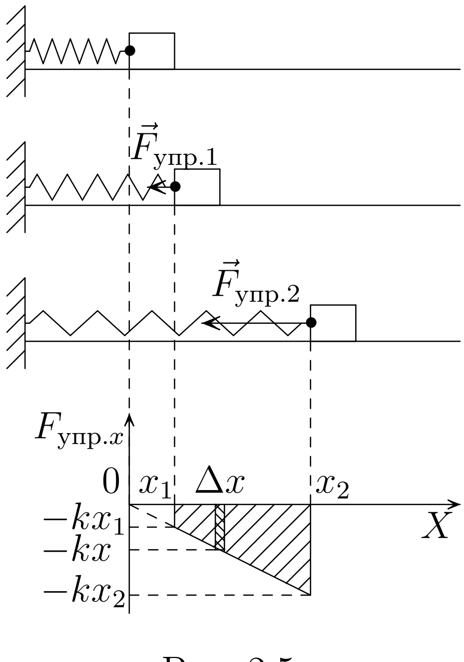


Рис. 2.5.

$$A = \frac{-kx_1 - kx_2}{2}(x_2 - x_1) = -\left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}\right). \tag{2.32}$$

Таким образом, работа силы упругости зависит только от начального и конечного удлинения пружины. Следовательно, сила упругости консервативна.

Потенциальная энергия упруго деформированного тела равна

$$E_p = \frac{kx^2}{2}. \tag{2.33}$$

Работа силы трения зависит от формы траектории и других действующих на тело сил. Если, например, сила трения в процессе движения тела остается неизменной по величине и направленной в сторону противоположную его перемещения, как, в случае санок из задачи 2 (стр. 54) при условии $F \sin\alpha > \mu(mg - F\cos\alpha)$, то

$$A = \sum F_{\text{тр.}} \Delta r \cos 180^\circ = -F_{\text{тр.}} \sum \Delta r = -F_{\text{тр.}} l \tag{2.34}$$

пропорциональна пройденному этим телом пути, что свидетельствует о неконсервативности силы трения.

В общем случае работу действующих на тело сил можно представить в виде суммы работ консервативных $-\Delta E_p$ и неконсервативных A' сил

$$A = -\Delta E_p + A'. \tag{2.35}$$

Подставляя (2.35) в (2.27), получим

$$\Delta E_k = -\Delta E_p + A'.$$

$$\Delta(E_k + E_p) = A'. \tag{2.36}$$

Сумму кинетической и потенциальной энергии тела, называют **механической энергией**:

$$E = E_k + E_p. \tag{2.37}$$

Таким образом, *изменение механической энергии тела равно работе всех действующих на него неконсервативных сил*:

$$\Delta E = A', \tag{2.38}$$

Данное утверждение называют **законом изменения механической энергии**.

Отсюда следует **закон сохранения энергии**, согласно которому, *механическая энергия тела, на которое не действуют неконсервативные силы, сохраняется* (*не изменяется со временем*).

Вопросы для самоконтроля.

1. Дайте определение энергии, работы и мощности. В чем состоит их физический смысл и в каких единицах они измеряются?
2. Дайте определение кинетической энергии. В чем ее смысл?
3. Сформулируйте теорему об изменении кинетической энергии и приведите примеры, ее иллюстрирующие?
4. Какие силы называют консервативными и неконсервативными? Приведите примеры известных Вам консервативных и неконсеравтивных сил.
5. Дайте определение потенциальной энергии. Чему равна потенциальная энергия тела в поле силы тяжести, энергия гравитационного взаимодействия тел, энергия упруго деформированного тела?
6. Является ли сила трения консервативной и почему? От чего зависит работа силы трения?
7. В чем состоят законы изменения и сохранения энергии? Приведите примеры их проявления.

Примеры решения задач.

Задача 21. Груз перемещают по горизонтальной поверхности, прилагая к нему силу 300 Н под углом 60° к горизонту. Найти работу, совершенную при перемещении груза на 10 м. Вычислить мощность указанной силы если груз двигался со скоростью 2 м/с.

Дано:
$F = 300$ Н
$\alpha = 60°$
$l = 10$ м
$v = 2$ м/с

A, P – ?

Решение.

По определению

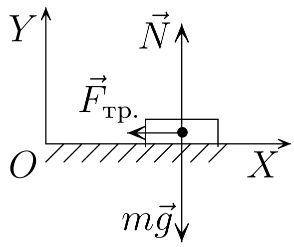
$$A = Fl\cos\alpha = 300 \text{ Н} \cdot 10 \text{ м} \cdot \frac{1}{2} = 1500 \text{ Дж} = 1.5 \text{ кДж}.$$

$$P = Fv\cos\alpha = 300 \text{ Н} \cdot 2 \text{ м/с} \cdot \frac{1}{2} = 300 \text{ Вт}.$$

Ответ: $A = 1.5$ кДж, $P = 300$ Вт.

Задача 22. Определить минимальное значение тормозного пути автомобиля, движущегося со скоростью 60 км/ч. Коэффициент трения принять равным 0,5.

Дано:	СИ
$v_0 = 60$ км/ч	$= 60000/3600$ м/с ≈ 20 м/с
$\mu = 0,5$	
l – ?	



Решение. Тормозной путь минимален при максимальном значении силы трения покоя:

$$F_{\text{тр.}} = \mu N.$$

Из условия отсутствия движения автомобиля в вертикальном направлении следует, что $N = mg$. Таким образом,

$$F_{\text{тр.}} = \mu mg.$$

Для определения искомого пути воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии

$$\Delta E_k = A. \tag{2.39}$$

Учитывая, равенство нулю конечной скорости автомобиля, имеем

$$\Delta E_k = -\frac{mv_0^2}{2}.$$

Сила тяжести и нормальной реакции направлены перпендикулярно перемещению автомобиля и работы не производят, поэтому

$$A = A_{\text{тр.}} = \vec{F}_{\text{тр.}}\vec{s} = -\mu mgl.$$

Подставляя выражения для A и E_k в (2.39), получим

$$-\frac{mv_0^2}{2} = -\mu mgl.$$

Отсюда

$$l = \frac{v_0^2}{2\mu g} = \frac{(20\text{ м/с})^2}{2 \cdot 10\text{ м/с}^2} = 40\text{ м}.$$

Ответ: $l = 40$ м.

Задача 23. Определить максимальную высоту, на которую поднимется камень, брошенный со скоростью 20 м/с под углом 30° к горизонту.

Дано:
$v_0 = 20$ м/с
$\alpha = 30°$
h_{max} – ?

Решение.

Поскольку в условии отсутствуют сведения о силе сопротивления, то ее можно считать пренебрежимо малой и воспользоваться законом сохранения энергии.

Принимая за нуль значение потенциальной энергии камня в точке бросания, имеем

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_{min}^2}{2} + mgh_{max}.$$

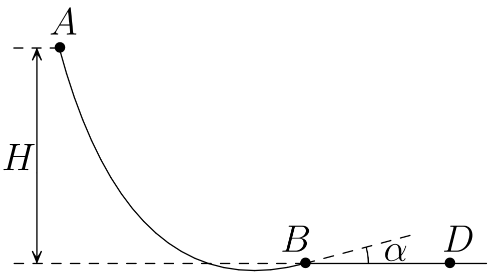
В процессе движения на камень действует только сила тяжести, направленная вертикально. Следовательно, горизонтальная составляющая его импульса не изменяется и $v_{\min} = v_0 \cos\alpha$.

С учетом сказанного, находим

$$h_{max} = \frac{v_0^2(1-\cos^2\alpha)}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{(20 \text{ м/с})^2 \sin^2 30°)}{2 \cdot 10 \text{ м/с}^2} = 5 \text{ м}.$$

Ответ: $h_{max} = 5$ м.

Задача 24. Шайба, массой $m = 100$ г начинает движение по желобу AB из состояния покоя. Точка A расположена выше точки B на высоте H. В процессе движения по желобу механическая энергия шайбы из-за трения уменьшается на величину ΔE. В точке B шайба вылетает из желоба под углом $\alpha = 15°$ к горизонту и падает на землю в точке D, находящейся на одной горизонтали с точкой B на расстоянии $BD = 4$ м. Найдите величину ΔE. Сопротивлением воздуха пренебречь.



Дано:	СИ
$m = 100$ г	$= 0.1$ кг
$= 6$ м	
$BD = 4$ м	
$\alpha = 15°$	
ΔE – ?	

Решение.

Для определения изменения энергии

$$\Delta E = mgH - \frac{mv^2}{2}.$$

необходимо вычислить скорость шайбы в точке B.

Повторяя рассуждения, изложенные при решении задачи 12 (стр. 28), получим

$$v_0^2 = \frac{gBD}{\sin 2\alpha}.$$

Отсюда находим

$$\Delta E = mg\left(H - \frac{BD}{2\sin 2\alpha}\right) = 0.1 \cdot 10\left(6 - \frac{4}{2\sin(2\cdot 15^\circ)}\right) \text{ Дж} = 2 \text{ Дж}.$$

Ответ: $\Delta E = 2$ Дж.

§ 6. Удар

Ударом *называют явление конечного изменения скоростей твердых тел при малом времени их взаимодействия.*

Условие малости определяется требованием того, чтобы за время удара можно было пренебречь изменением взаимного расположения тел и импульсами действующих на них внешних сил. Поэтому систему соударяющихся тел можно считать замкнутой.

Общую нормаль к поверхностям соударяющихся тел в точке их соприкосновения называют **линией удара**.

Силы, возникающие между соударяющимися телами, называют **ударными**.

В отсутствие трения ударные силы направлены вдоль линии удара.

Удар называют **прямым**, *если скорости центров масс соударяющихся тел параллельны линии удара.*

Удар называют **центральным**, *центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара.*

Удар, в процессе которого выполняется закон сохранения механической энергии, называют **абсолютно упругим**.

Удар называют **абсолютно неупругим**, *если после взаимодействия соударяющиеся тела движутся с одинаковой скоростью.*

В процессе неупругого удара часть механической энергии соударяющихся тел переходит в их внутреннюю (тепловую) энергию.

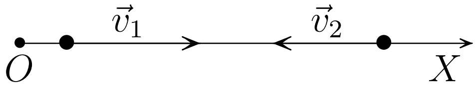
Задача 25. Два шара массами m_1 и m_2, движущиеся навстречу друг другу со скоростями v_1 и v_2, сталкиваются между собой. Удар центральный и абсолютно упругий. Найти скорости шаров после столкновения.

Дано:
v_1, v_2
m_1, m_2

u_1, u_2 – ?

Решение.

Введем систему координат, с осью OX совпадающей с направлением движения первого шара.



На основании законов сохранения энергии и импульса запишем

$$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1u_{1x} + m_2u_{2x},$$
$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{m_1u_{1x}^2}{2} + \frac{m_2u_{2x}^2}{2}.$$

Выполняя очевидные преобразования, получим

$$m_1(v_1 - u_{1x}) = m_2(v_2 + u_{2x}),$$
$$m_1(v_1^2 - u_{1x}^2) = m_2(v_2 - u_{2x}),$$

что эквивалентно

$$m_1(v_1 - u_{1x}) = m_2(v_2 + u_{2x}),$$
$$v_1 + u_{1x} = v_2 - u_{2x}.$$

Складывая второе уравнение, умноженное на m_1, с первым, имеем

$$2m_1v_1 = (m_2 - m_1)v_2 + (m_1 + m_2)u_{2x}.$$

Отсюда находим

$$u_{2x} = \frac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку частицы отличаются друг от друга только номерами и направлениями начальной скорости, поменяем их индексы с учетом знака проекции начальной скорости, что дает

$$u_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

В справедливости полученного результата можно убедиться непосредственной подстановкой.

Ответ: $u_{1x} = \dfrac{(m_1 - m_2)v_1 - 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$, $u_{2x} = \dfrac{(m_1 - m_2)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$.

III. Статика

Статика *–раздел механики, посвященный изучению условий равновесия тел.*

§ 1. Условия равновесия тел

Равновесием тела *называют состояние, при котором оно покоится, т.е. все его точки неподвижны относительно рассматриваемой системы отсчета.*

Если система отсчета инерциальна, то равновесие называют **абсолютным**.

Обычно ограничиваются рассмотрением абсолютного равновесия и условие инерциальности отдельно не оговаривают.

Поскольку все точки покоющегося тела неподвижны, то ускорение его центра масс равно нулю, что в соответствии с (2.5) возможно только при равенстве нулю суммы всех действующих на данное тело внешних сил

$$\sum_k \vec{F}_k = 0. \tag{3.1}$$

Условие (3.1) является необходимым, но недостаточным условием равновесия. Это означает, что равновесие тела возможно только в том случае, когда сумма действующих на него сил равно нулю. Однако, из (3.1) следует лишь равенство нулю ускорения центра масс, при этом центр масс может перемещаться с постоянной по величине и направлению скоростью, а тело вращаться вокруг него произвольным образом.

Заметим, что центр масс системы будет неподвижен если, при равенстве нулю суммы всех приложенных к телу сил, его скорость в рассматриваемой системе отсчета на момент начала их действия была равна нулю.

Перейдем к рассмотрению условий, обеспечивающих отсутствие вращения.

Предварительно отметим, что, как показывает опыт, действующие вдоль одной прямой равные и противоположно направленные силы вращения не вызывают. Поэтому, при переносе точки приложения силы вдоль ее направления равновесие не нарушается.

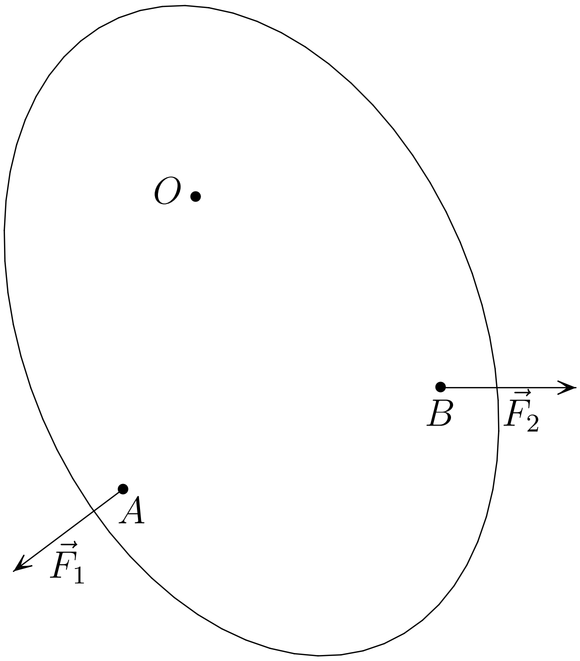


Рис. 3.1.а.

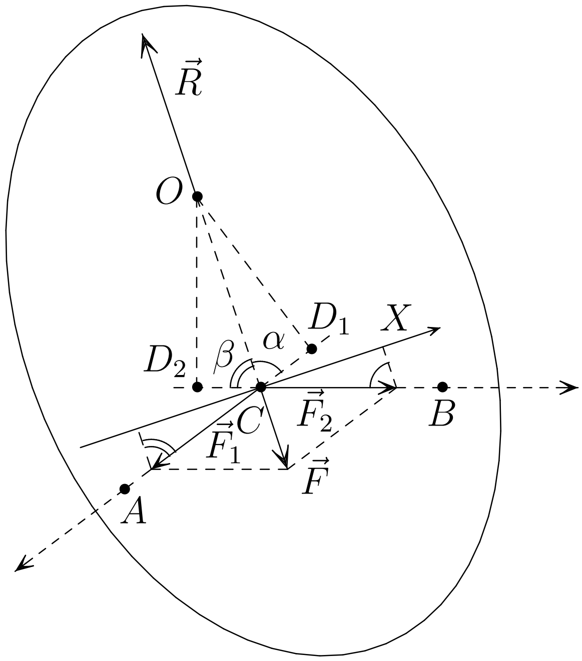


Рис. 3.1.б.

Представим тело, которое может поворачиваться без трения вокруг проходящей через точку O неподвижной оси (рис. 3.1.а.). Пусть в точках A и B к нему приложены силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ соответственно.

В виду того, что сила, направленная параллельно оси приводит лишь к поступательному движению, ограничимся рассмотрением сил, перпендикулярных оси. Кроме того, условимся считать их лежащими в одной плоскости. В этом случае для определения равнодействующей

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \tag{3.2}$$

векторы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ следует перенести в точку пересечения линий их действия и сложить по правилу параллелограмма (рис. 3.1.б.).

Тело будет находиться в состоянии покоя при условии, что вектор F лежит на прямой OC, поскольку только в этом случае она будет уравновешена силой реакции R со стороны оси.

Проецируя (3.2) на направление $AX \perp \vec{F}$, запишем

$$0 = -F_1 \sin\alpha + F_2 \sin\beta,$$

что дает

$$F_1 \sin\alpha = F_2 \sin\beta.$$

С другой стороны из треугольников OCD_1 и OD_2C следует, что

$$\frac{d_1}{\sin\alpha} = \frac{d_2}{\sin\beta},$$

где d_1 и d_2 – расстояние от оси вращения до линии действия сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ соответственно.

Сравнивая полученные соотношения имеем

$$F_1 d_1 = F_2 d_2. \tag{3.3}$$

Расстояние, от оси до линии действия силы, называют **плечом силы**

Величину, равную произведению модуля силы на плечо, называют **моментом силы относительно оси**:

$$M = Fd. \tag{3.4}$$

Единица момента – *ньютон-метр* ($\text{Н} \cdot \text{м}$).

Можно доказать, что условие (3.3) выполняется в случае произвольного количества и направления сил.

Таким образом, если твердое тело с закрепленной осью вращения находится в равновесии, то алгебраическая сумма моментов всех действующих на него внешних сил равна нулю:

$$\sum_k M_k = 0. \tag{3.5}$$

При этом, моменты сил, вызывающих вращение по часовой стрелке, следует считать положительными, а против – отрицательными. Момент силы, не перпендикулярной оси, принимают равным моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную этой оси.

Объединяя полученные результаты можно сформулировать общее условие равновесия тела:

Если твердое тело находится в равновесии, то сумма всех приложенных к нему внешних сил и сумма моментов этих сил относительно любой оси равны нулю.

Вопросы для самоконтроля.

1. Какое состояние называют равновесием тела? Приведите примеры тел, находящихся в равновесии.

2. Сформулируйте условия, при которых тела находятся в равновесии. Приведите примеры.

3. Всегда ли при равенстве нулю суммы сил и их моментов тело находится в покое?

4. Может ли тело находиться в покое если сумма сил или их моментов не равна нулю?

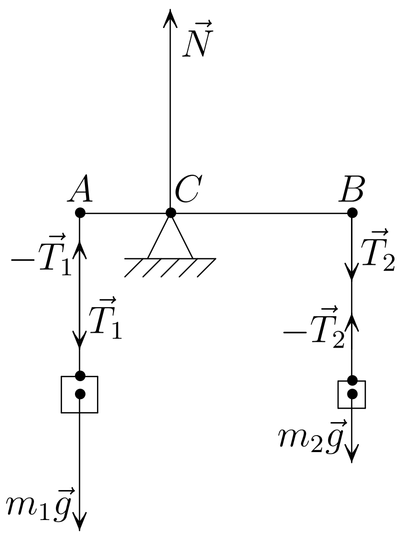
5. Что называют плечом и моментом силы?

§ 2. Примеры решения задач

Задача 1. Где следует поставить опору под линейку длиной 1,5 м, чтобы подвешенные к ее концам грузы массами 1 и 2 кг находились в равновесии.

Дано:
$l = 1,5$ м
$m_1 = 1$ кг
$m_2 = 2$ кг
x – ?

Решение.
Примем за x расстояние от искомой точки C до того конца стержня к которому подвешен груз большей массы.



Из условия равенства нулю суммы моментов действующих на линейку сил относительно оси, перпендикулярной плоскости чертежа и проходящей через C, имеем:

$$T_2(l - x) = T_1 x.$$

Отсюда, с учетом условия равновесия грузов

$$T_1 = m_1 g, \quad T_2 = m_2 g,$$

находим

$$x = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} = \frac{1 \cdot 1,5}{1 + 2} \text{ м} = 0,5 \text{ м}.$$

Ответ: $x = 0,5$ м.

Задача 2. Шар массой m, радиусом R, висит на веревке, прикрепленной к гладкой стене. Определить силы реакции, действующие на шар.

Дано:
m
R
l

T, N – ?

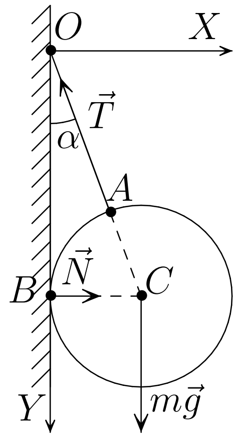
Решение.

Проецируя условие

$$m\vec{g} + \vec{T} + \vec{N} = 0$$

на оси координат, имеем

$$OX: \quad N - T\sin\alpha = 0,$$
$$OY: \quad T\cos\alpha - mg = 0.$$



Отсюда находим

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}, \quad N = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

Поскольку линии действия силы тяжести и нормальной реакции, пересекаются в точке C, то их момент относительно любой проходящей через эту точку оси равен нулю. Поэтому линия действия силы натяжения нити также должна проходить через C. Следовательно, отрезки OA и AC лежат на одной прямой. Соответственно,

$$T = \frac{mg(l+R)}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}}, \quad N = \frac{mgR}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}}.$$

Ответ: $T = \dfrac{mg(l+R)}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}}$, $N = \dfrac{mgR}{\sqrt{(l+R)^2 - R^2}}$.

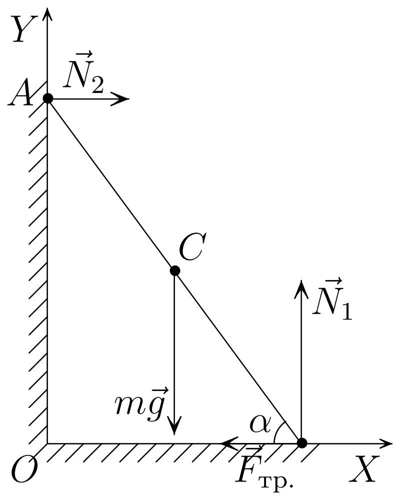
Задача 3. Лестница стоит на полу, опираясь верхним концом о гладкую стену. Коэффициент трения между лестницей и полом равен 0,5. Полагая, что центр тяжести находится на середине лестницы, определить, при каком значении угла наклона к горизонту она будет находится в равновесии.

Дано:
$\mu = 0,5$

α – ?

Решение.

Условия равенства нулю сил и их моментов относительно оси, проходящей перпендикулярно чертежу через точку A, дают



$$OX: \quad N_2 - F_{\text{тр.}} = 0,$$
$$OY: \quad N_1 - mg = 0,$$
$$M_A: \quad mg\frac{l\cos\alpha}{2} - F_{\text{тр.}} l\sin\alpha - N_1 l\cos\alpha = 0,$$

где l – длина лестницы.

Выполняя очевидные преобразования, имеем

$$F_{\text{тр.}} \sin\alpha = \frac{N_1 \cos\alpha}{2}.$$

Отсюда, с учетом того, что $F_{\text{тр.}} \leq \mu N_1$, получим

$$\operatorname{ctg}\alpha \leq 2\mu = 2{\cdot}0.5 = 1.$$

Следовательно, угол наклона лестницы к горизонту должен быть не меньше $45°$.

Ответ: $\alpha \geq 45°$.